

Viši fizikalni praktikum I

Maja Đekić, Dijana Dujak, Majra Šišić Čaluk,
Kerim Hrvat

Sarajevo, 2026. godine

Viši fizikalni praktikum I

Autori:

prof. dr. Maja Đekić, prof. dr. Dijana Dujak, Majra Šišić Čaluk MA, Kerim Hrvat MA

Recenzenti:

prof. dr. Amra Salčinović Fetić
vanredna profesorica Univerziteta u Sarajevu – Prirodno-matematičkog
fakulteta

doc. dr. Almedina Modrić Šahbazović
docentica Prirodno – matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli

Izdavač:

Univerzitet u Sarajevu – Prirodno-matematički fakultet

Adresa izdavača:

Zmaja od Bosne 33-35, Sarajevo

Godina izdanja:

2026

Izdanje:

elektronsko

ISBN 978-9926-594-03-9

CIP zapis dostupan u COBISS sistemu Nacionalne i univerzitetske biblioteke
BiH pod ID brojem 69148934

PREDGOVOR

Ovaj rukopis je namijenjen studentima Odsjeka za fiziku, Univerziteta u Sarajevu – Prirodno-matematičkog fakulteta, kao glavna literatura za predmet Viši fizikalni praktikum I koji je obavezan za sva usmjerenja na četvrtoj godini I ciklusa studija. Viši fizikalni praktikum I predstavlja nadogradnju na osnovne praktikume koji se na Odsjeku za fiziku realizuju na prvoj, drugoj i trećoj godini studija. U poređenju sa vježbama iz osnovnih praktikuma, vježbe iz predmeta Viši fizikalni praktikum I postaju složenije i često zahtijevaju preciznija i dugotrajnija mjerenja. Materijal se sastoji od sedam vježbi, prvenstveno iz oblasti Fizike čvrstog stanja, ali i iz drugih oblasti moderne fizike.

Iako je Viši fizikalni praktikum I u nastavi na Odsjeku za fiziku prisutan već dugi niz godina, studenti do sad nisu imali na raspolaganju priručnik za ovaj predmet. Za pripreme vježbi koristila se neregizirana interna skripta sa dijelovima teksta iz različitih udžbenika (domaćih i stranih), praktikuma ili uputstava za upotrebu mjernih uređaja, koju su tokom godina pisali različiti bivši zaposlenici. Tu prvenstveno treba spomenuti pokojnog prof. dr. Dimitrija Čajkovskog, koji je i osmislio ovaj predmet. Pored njega svoj doprinos u pisanju priprema su dali pokojna prof. dr. Tamara Čajkovski, pokojni prof. dr. Stjepan Marić i pokojni viši asistent, magistar Saša Vrcelj. Obogaćivanju materijala doprinijeli su i viši asistent, magistar Matej Lozančić i prof. dr. Suada Sulejmanović.

Nakon temeljite rekonstrukcije Odsjeka za fiziku u toku 2022. godine nabavljen je određeni broj novih vježbi za predmet Viši fizikalni praktikum I te se ukazala potreba da se prethodni materijal sistematizuje, preradi i strukturno i jezički ujednači. Sve vježbe su obogaćene novim fotografijama, slikama i šemama. Većina starih vježbi je ili dopunjena ili potpuno zamijenjena novim vježbama. Ono što je bio naš primarni cilj je da se studentima obezbijedi koncizan materijal u elektronskoj formi koji će im omogućiti da se što kvalitetnije pripreme za izvođenje vježbi.

Autori

Sadržaj

1	Frank-Hertzov eksperiment	7
1.1	Teorijski uvod	7
1.1.1	Bohrov model atoma	7
1.1.2	Franck-Hertzov eksperiment	8
1.2	Uređaj i metodika rada	10
1.2.1	Mjerenja s helijevom cijevi	10
1.2.2	Mjerenja s neonskom i živinom cijevi	13
1.3	Praktičan rad	19
2	Proučavanje karakterističnih rendgenskih zraka	23
2.1	Teorijski uvod	23
2.1.1	Rendgenske zrake	23
2.2	Uređaj i metodika rada	26
2.3	Praktičan rad	31
3	Termoelektronska emisija	35
3.1	Teorijski uvod	35
3.1.1	Termoelektronska emisija iz metala	35
3.1.2	Mjerenje malih otpora po Matthiessenu i Hockinu	36
3.1.3	Određivanje reda veličine specifičnog naboja elektrona	37
3.2	Uređaj i metodika rada	38
3.2.1	Snimanje voltamperske karakteristike diode	38
3.2.2	Određivanje izlaznog rada iz Richardsonove formule	40
3.2.3	Provjera Langmuirove formule	42
3.2.4	Mjerenje specifičnog naboja elektrona	42
3.3	Praktičan rad	45
4	Termoelektrične pojave u poluprovodnicima	49
4.1	Teorijski uvod	49
4.1.1	Termoelektrični efekat	49
4.1.2	Termoelektrični generator (termoelektrična baterija)	51
4.2	Uređaj i metodika rada	53
4.2.1	Određivanje električnog otpora termoelektrične baterije	54
4.2.2	Određivanje Seebeckovog koeficijenta za spoj Bi-Te	55
4.2.3	Određivanje toplotne provodljivosti termoelektrične baterije	56
4.2.4	Određivanje Seebeckovog koeficijenta za n- i p-tip poluprovodnika	56
4.2.5	Ispitivanje Peltierovog efekta u n- i p-tipu poluprovodnika	57

4.3	Praktičan rad	58
5	Hallov efekat u poluprovodnicima	61
5.1	Teorijski uvod	61
5.1.1	Energetske vrpce	61
5.1.2	Vlastita i primjesna vodljivost poluprovodnika. Koncentracija elektrona i šupljina.	63
5.1.3	Hallov efekat	66
5.1.4	Širina zabranjene zone poluprovodnika	69
5.2	Uređaj i metodika rada	70
5.2.1	Zavisnost Hallovog napona od jačine struje	73
5.2.2	Određivanje promjene napona i otpora uzorka	73
5.2.3	Određivanje širine zabranjene zone	73
5.2.4	Određivanje Hallove konstante, koncentracije i pokretljivosti nosilaca naboja	74
5.2.5	Promjena Hallovog napona s temperaturom	74
5.3	Praktičan rad	75
6	Comptonov efekat – energetski razlučivo direktno mjerenje	79
6.1	Teorijski uvod	79
6.2	Uređaj i metodika rada	82
6.3	Praktičan rad	85
7	Duane-Huntov zakon	87
7.1	Teorijski uvod	87
7.2	Uređaj i metodika rada	88
7.3	Praktičan rad	89
	Fizikalne konstante	93
	Literatura	95

Vježba 1

Frank-Hertzov eksperiment

Zadaci:

1. Snimiti dijagram zavisnosti anodne struje elektronske cijevi punjene helijem od ubrzavajućeg napona pri naponima kočenja od 1,5 V, 2 V i 2,5 V.
2. Snimiti voltampersku karakteristiku elektronske cijevi punjene helijem.
3. Snimiti dijagram zavisnosti anodne struje elektronske cijevi punjene neonom od ubrzavajućeg napona pri naponima kočenja od 2 V, 2,5 V i 3 V.
4. Snimiti dijagram zavisnosti anodne struje elektronske cijevi punjene živom od ubrzavajućeg napona pri naponu kočenja od 2 V. Mjerenja izvršiti na različitim temperaturama.
5. Diskutovati rezultate.

1.1 Teorijski uvod

1.1.1 Bohrov model atoma

Ernest Rutherford (1871-1937) je 1911. godine postulirao planetarni model atoma koji se sastoji od teškog pozitivno naelektrisanog jezgra i elektrona koji kruže oko njega po tačno određenim orbitama. Sa stanovišta klasične elektrodinamike takav atom bi bio nestabilan jer bi elektroni koji se ubrzano kreću zračili energiju u vidu elektromagnetnih (EM) talasa i postepeno se, po spiralnim putanjama, približavali jezgru. U isti mah bi se i frekvencija kruženja pod ovim uslovima neprekidno mijenjala, a s tim i frekvencija elektromagnetnog zračenja, tako da bi spektar zračenja atoma bio kontinuiran. Izvanredna stabilnost atoma kao i činjenica da atomske spektre sačinjavaju uske spektralne linije, a ne kontinuiran spektar, ukazuje na to da je Rutherfordov model trebalo usavršiti.

Max Planck (1858-1947) je 1900. godine, u pokušaju da objasni zračenje apsolutno crnog tijela, postavio postulat o postojanju stabilnih stacionarnih stanja oscilatora koji je bio neophodna pretpostavka za izvođenje ispravne formule o zračenju apsolutno crnog tijela. Planckov postulat, koji predstavlja jedan od osnovnih principa kvantne mehanike, kaže da je energija oscilatora apsolutno crnog tijela E kvantizirana, tj.

$$E = nh\nu, \quad (1.1)$$

gdje je n cijeli broj, h Planckova konstanta, a ν frekvencija zračenja oscilatora. Nielsu Bohru (1885-1962) pripada zasluga za jasnu formulaciju ovog stava i za njegovo uopštavanje na proizvoljne atomske sisteme (atom, jon, molekula). Time je prvi put jasno pokazana neprimjenljivost klasične fizike na kretanja unutar atoma. Ideja o kvantima koju je uveo Planck da bi protumačio razmjenu energije između spoljašnjeg polja EM zračenja i linearnih oscilatora (dipola), stekla je univerzalni značaj jer izražava specifičnu, ali veoma bitnu osobinu procesa u unutrašnjosti atoma. Bohr je razvio mješavinu klasične i kvantne teorije atoma, oslanjajući se na Rudherfordovu ideju o postojanju pozitivnog jezgra i elektrona koji kruže oko njega, formulišući 1913. godine još dva postulata:

1. Elektroni kruže oko jezgra po tačno određenim stabilnim (stacionarnim) stazama (orbitama) pri čemu ne zrače energiju. Moment impulsa elektrona L je u stacionarnom stanju kvantiziran:

$$L = mvr = n\hbar, \quad (1.2)$$

gdje je m masa elektrona, v njegova brzina, r radijus orbite, \hbar redukovana Planckova konstanta, a $n = 1, 2, 3, \dots$ kvantni broj koji određuje redni broj staze. U ovim stacionarnim stanjima elektron ima diskretne energije: E_1, E_2, \dots, E_n .

2. Ukoliko pri prelazu iz jednog stacionarnog stanja u drugo atom emituje ili apsorbuje EM zračenje, onda je takvo zračenje strogo određene frekvencije. Veličina emitovanog ili apsorbovanog kvanta energije (fotona) određena je razlikom energija početnog (E_n) i krajnjeg stanja (E_m) tog prelaza:

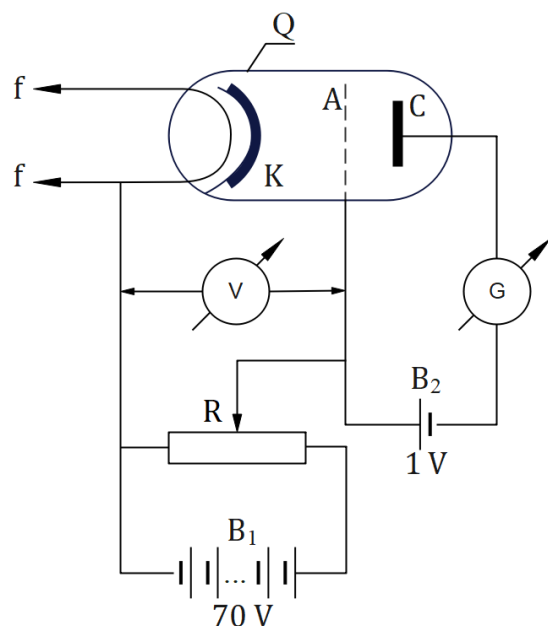
$$h\nu = E_m - E_n = \Delta E, \quad (1.3)$$

gdje su m i n cijeli brojevi koji označavaju redni broj orbite.

Ovi postulati su protivrječni zahtjevima klasične elektrodinamike, jer prema prvom postulatu atomi ne zrače energiju, bez obzira što vrše ubrzano kretanje, a prema drugom postulatu, frekvencije emitovanog zračenja nemaju ničeg zajedničkog s frekvencijama periodičnog kretanja elektrona. Tek će kvantna mehanika dati potpuno objašnjenje građe atoma.

1.1.2 Franck-Hertzov eksperiment

James Franck (1882-1964) i Gustav Ludwig Hertz (1887-1975) su 1914. godine izveli prvi eksperiment koji je potvrdio Bohrovu pretpostavku da su energetska nivoi u atomima kvantizirani. Eksperimentalna postavka je prikazana na slici 1.1. Staklena cijev Q je dobro evakuisana, a zatim je u nju ubačena manja količina žive (Hg). Pri eksperimentu, cijev se zagrije do temperature $150 - 200^\circ\text{C}$, tako da živina para u njoj dostigne pritisak oko 0,1 torr (1 torr = 1 mmHg). U cijevi se nalazi katoda K, koja se indirektno grije, anoda A u vidu rešetke i kolektor C. Potencijal anode obezbjeđuje se iz izvora B_1 , reguliše se potencijetrom R, a mjeri voltmetrom V. Izvor B_2 održava kočeći napon između anode i kolektora (oko 1 V). Elektroni napuštaju katodu i ubrzavaju se prema anodi, a zatim usljed napona kočenja usporavaju dalje prema kolektoru. Do kolektora stižu oni elektroni čija energija iznosi najmanje 1 eV. Eksperiment se sastoji u mjerenju kolektorske struje I pomoću galvanometra G u zavisnosti od

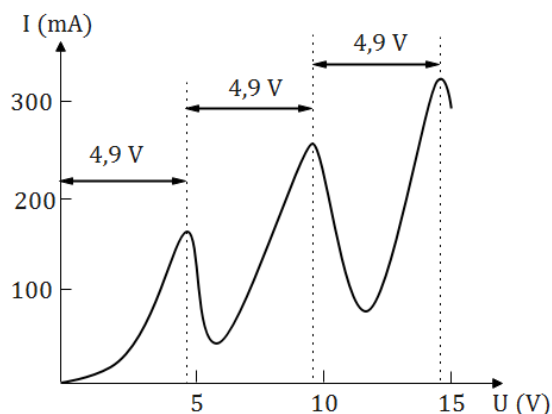


Slika 1.1. Šematski prikaz Franck-Hertzovog eksperimenta.

ubrzavajućeg napona U između anode i katode, a tipičan rezultat je prikazan na slici 1.2.

U intervalu od $U = 0\text{ V}$ do $U = 1\text{ V}$ kolektorska struja se ne javlja jer elektroni ne stižu do kolektora. Za vrijednosti U iznad 1 V struja se postepeno povećava jer potrebnu energiju dobija sve veći broj elektrona. Pri vrijednosti napona od $4,9\text{ V}$ struja dostiže maksimum, zatim naglo opada pa se opet povećava do drugog ($2 \cdot 4,9\text{ V}$), trećeg ($3 \cdot 4,9\text{ V}$), itd. maksimuma.

Frank i Hertz su ove rezultate objasnili elastičnim i neelastičnim sudarima elektrona s atomima žive. Elektroni se elastično sudaraju s atomima žive sve dok im je energija manja od $4,9\text{ eV}$. Elektroni koji prolaze anodu s energijom $\geq 1\text{ eV}$, stižu do kolektora i registruje se kolektorska struja. S povećanjem U povećava se i I jer sve veći broj elektrona stiže do kolektora. Kad elektron dostigne energiju od $4,9\text{ eV}$, doživljava neelastični sudar s atomom žive, pri čemu mu predaje energiju i zato atom žive prelazi u prvo pobuđeno stanje. Elektroni trpe neelastične sudare u zoni neposredno ispred anode, nemaju dovoljno energije da savladaju kočee polje od A do C i zato struja naglo opada. Daljim povećanjem napona elektroni opet dobijaju dovoljnu energiju da savladaju kočee polje i struja se ponovno povećava do drugog maksimuma gdje se javlja drugi neelastični sudar praćen padom struje. Daljim povećanjem napona javljaju se treći, četvrti itd. maksimumi struje. Frank-Hertzov eksperiment potvrđuje da atom žive prima kvant energije od $4,9\text{ eV}$ nakon čega prelazi iz osnovnog E_1 u prvo pobuđeno stanje E_2 . Ovaj se prelaz naziva rezonantni, a odgovarajuća razlika energije od $4,9\text{ eV}$ predstavlja rezonantni potencijal atoma žive. Da bi se živa dovela u viša pobuđena stanja (drugo, treće, itd.), potrebno je dovesti odgovarajuće eksitacione potencijale (drugi, treći, itd.). Ovo se, međutim, realizuje drugom eksperimentalnom tehnikom. Prema drugom Bohrovom postulatu,



Slika 1.2. Anodna struja u zavisnosti od ubrzavajućeg napona.

pobuđeni atom žive povratkom u osnovno stanje emituje foton energije $h\nu$:

$$h\nu = \Delta E = E_2 - E_1 = 4,9 \text{ eV}. \quad (1.4)$$

Talasna dužina λ emitovanog fotona je iz relacije (1.4):

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4,9 \text{ eV}} \approx 254 \text{ nm}, \quad (1.5)$$

gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu. Spektralnim aparatom je izmjereno da živine pare zaista emituju svjetlost talasne dužine koja je približno 254 nm što je bila potvrda Bohrove pretpostavke o postojanju diskretnih energetskih nivoa u atomima. Kasnije su ovakvi eksperimenti urađeni i s drugim atomima, pa tako za vodik rezonantni potencijal iznosi 12,2 eV, za natrij 2,12 eV, helij 21 eV itd.

1.2 Uređaj i metodika rada

Frank-Hertzov eksperiment se u ovoj vježbi izvodi na dva načina:

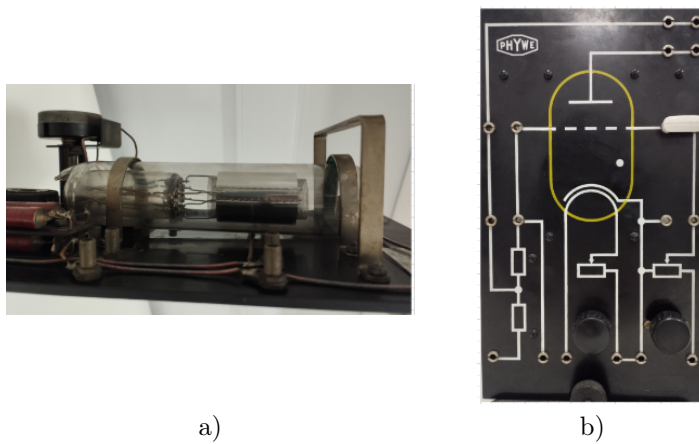
1. koristeći helijevu (He) cijev, uz spajanje kompletne šeme koristeći odgovarajuće instrumente i
2. koristeći neonsku (Ne) i živinu (Hg) cijev¹ uz pomoć kontrolne jedinice u kojoj su integrisane sve mjerne komponente, s mogućnošću kontrole mjerenja i obrade podataka pomoću računara i odgovarajućeg softvera.

1.2.1 Mjerenja s helijevom cijevi

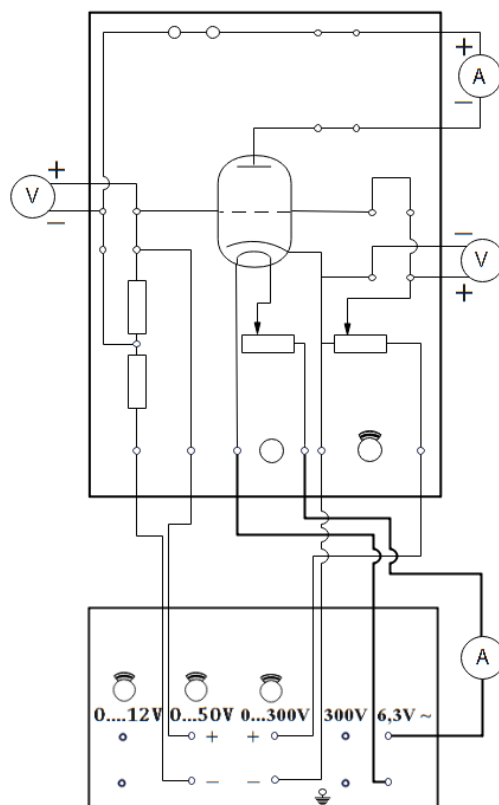
Helijeva cijev koja se koristi u vježbi prikazana je na slici 1.3.

Za mjerenje zavisnosti anodne struje od ubrzavajućeg napona, spaja se šema prikazana na slici 1.4, a šema na slici 1.5 spaja se za snimanje voltamperske karakteristike.

¹Zgodno je primijetiti da su sve tri cijevi od istog proizvođača Phywe, ali je vremenski raspon između njih nekih 40-ak godina.



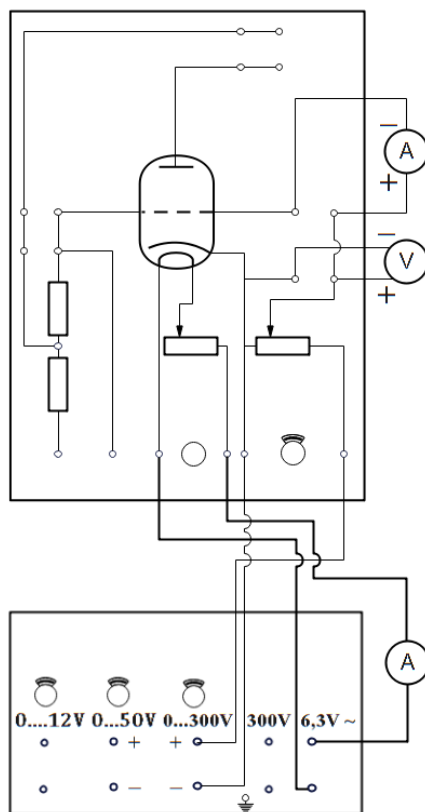
Slika 1.3. a) He cijev i b) prednja strana ploče na koju je pričvršćena cijev.



Slika 1.4. Šema za mjerenje zavisnosti anodne struje elektronske cijevi punjene helijem od ubrzavajućeg napona.

Naponi potrebni za rad cijevi dovode se s ploče preko tri para buksni, i to:

a) Na lijevom paru buksni dovodi se napon kočenja 1,3 V ("-" pol je lijevo).



Slika 1.5. Šema za snimanje voltamperske karakteristike elektronske cijevi punjene helijem.

- b) Na srednjem paru buksni dovodi se naizmjenični napon grijanja od 6,3 eV. Napon grijanja podešava se potenciometrom u sredini ploče. Na početku mjerenja potenciometar je potrebno okrenuti do kraja desno tj. na maksimum da bi se katoda dovoljno zagrijala. Preporučuje se da se napon grijanja kontrolira voltmetrom za vrijeme eksperimenta. Vrijednost struje grijanja je oko 1,36 A.
- c) Na desnom paru buksni dovodi se ubrzavajući napon 30 – 35 V ("-") pol je lijevo). Ubrzavajući napon podešava se desnim potenciometrom.

Mjerna područja za uređaje (pogledati sliku 1.4) biraju se kako slijedi: voltmetar s desne strane pokazuje ubrzavajući napon koji ne treba da prelazi maksimalnu vrijednost 30 V; gornji ampermetar s desne strane prikazuje mikroampersku anodnu struju te se koristi na mikroamperskom mjernom području; donji ampermetar s desne strane pokazuje struju grijanja od oko 1,36 A, te se koristi na mjernom području od 2,5 A; voltmetar s lijeve strane pokazuje napon kočenja i koristi se na mjernom području do 15 V.

Napomena: Prije početka mjerenja potrebno je prvo pustiti struju grijanja od 1,36 A i sačekati minimalno 20 minuta da se cijev adekvatno zagrije,

pa tek onda početi s mjerenjima.

1.2.2 Mjerenja s neonskom i živinom cijevi

Opis kontrolne jedinice za Frank-Hertzov eksperiment

Frank-Hertzova kontrolna jedinica prikazana na slici 1.6 služi kao izvor napona, kontrolu Ne i Hg cijevi, mjerenje temperature i anodne struje.

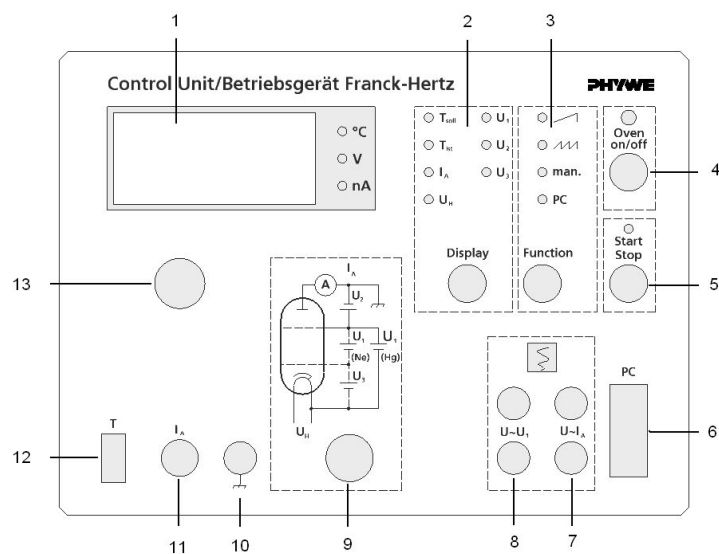


Slika 1.6. Kontrolna jedinica za Frank-Hertzov eksperiment.

Kontrolna jedinica obezbjeđuje ubrzavajući napon U_1 , napon kočenja U_2 , kontrolni napon U_3 (samo za Ne cijev) i napon grijanja U_H (samo za Hg cijev). Nijedan od ovih napona nije opasan na dodir. Naponi se dovode na vakuumiranu cijev uz pomoć kabla s 5 pinova. Kablovi su kodirani tako da kontrolna jedinica prepoznaje koja cijev je priključena na uređaj i prema tome podešava osnovne postavke. Sve mjerene i podesive veličine se prikazuju na LED-ekranu.

Šema kontrolne jedinice prikazana je na slici 1.7. Na datoj šemi funkcije na kontrolnoj jedinici su označene kako slijedi:

- (1) trocifreni digitalni ekran s opcionalnim prikazom temperature T , anodne struje I_A ili napona U_H , U_1 , U_2 ili U_3 ;
- (2) "Display" tipka za izbor veličine koja će se prikazivati na ekranu;
- (3) "Function" tipka za izbor funkcije prikaza rezultata: "ramp", saw tooth", "maunual control" ili "PC control";
- (4) "Oven on/off" tipka za aktivaciju grijanja pećnice za mjerenja s Hg lampom;
- (5) "Start Stop" tipka za pokretanje ili zaustavljanje mjerenja;
- (6) ulaz s 9 pinova RS 232 za povezivanje kontrolne jedinice sa serijskim interfejsom računara;



Slika 1.7. Šema kontrolne jedinice za Frank-Hertzov eksperiment.

- (7) ulaz " $U - I_A$ "; analogni izlaz (Y): napon proporcionalan anodnoj struji;
- (8) ulaz " $U - U_1$ "; analogni izlaz (X): napon proporcionalan ubrzavajućem naponu U_1 ;
- (9) DIN ulaz za napajanje cijevi (U_H , U_1 , U_2 i U_3);
- (10) GND konektor (uzemljenje);
- (11) BNC ulaz " I_A " za mjerenje anodne struje;
- (12) temperaturni ulaz T za priključivanje termopara NiCr-Ni s DIN ulazom (tip K);
- (13) rotirajući prekidač za regulisanje temperature (T_{nom}), i napona (U_H , U_1 , U_2 i U_3);

Na zadnjoj strani instrumenta nalazi se uzemljena utičnica za davanje napona pećnici s temperaturnom regulacijom za Hg cijev.

Spajanje instrumenta i mjerenje

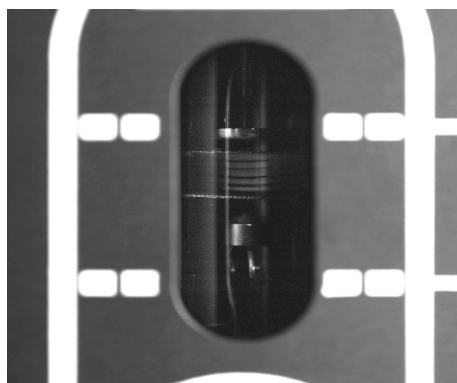
Ukoliko se koristi Ne cijev povezati je pomoću kabla s 5 pinova i BNC kabla s kontrolnom jedinicom (ulazi (9) i (11)) kako je prikazano na slici 1.8. Provjeriti da li oznake na kablovima odgovaraju oznakama na instrumentu. U vježbi se za akviziciju i prezentaciju podataka koristi računar pa se kontrolna jedinica povezuje s računarom pomoću RS 232 kabla na ulaz (6) (ako je potrebno koristiti USB-RS 232 adapter). Uključiti kontrolnu jedinicu uz pomoć prekidača sa zadnje strane i pritiskom na tipku (3) odabrati opciju "PC". Pokrenuti mjerni softver i izabrati program "Franck-Hertz measurement". Program automatski

prepoznaje da li je priključena Hg ili Ne cijev. U softveru se nakon prepoznavanja cijevi aktiviraju ranije definisane vrijednosti parametara koji se dodatno mogu podešavati da bi se mjerenje uspješno izvršilo.



Slika 1.8. Eksperimentalna postavka za Ne cijev.

Svijetle trake prikazane na slici 1.9 su tipične za Ne cijev. Vidljivi svijetli tragovi (talasna dužina oko 640 nm što odgovara energiji od oko 2 eV) se generišu kada atomi Ne koji su pobuđeni usljed sudara s elektronima prelaze s $3p$ nivoa (energije oko 19 eV) preko $3s$ nivoa (oko 17 eV) u osnovno stanje.



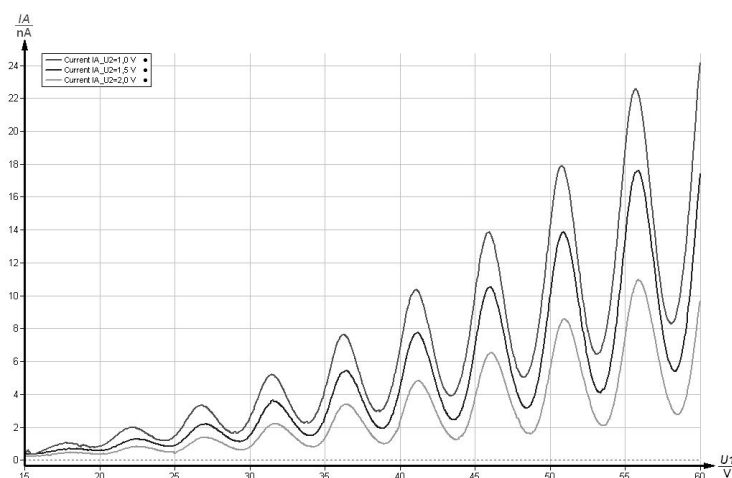
Slika 1.9. Pet tipičnih svjetlih traka za Ne cijev.

Ukoliko se radi s Hg lampom, komponente treba spojiti kao na slici 1.10. Provjeriti da li oznake na kablovima odgovaraju oznakama na instrumentu. Za Hg lampu se dodatno mora povezati temperaturni senzor na ulaz (12) kontrolne

malne vrijednosti. Ovo osigurava da se bimetalni prekidač u pećnici aktivira i isključi pećnicu pri veoma visokim temperaturama, tako da se ne remeti proces regulisanja temperature. Prije početka mjerenja, Hg cijev treba grijati minimalno 20-ak minuta.

Parametri za Hg cijev su već ranije definisani u softveru (pogledati sliku 1.11) i oni se mogu dodatno podešavati da bi se uspješno snimila zavisnost anodne struje od ubrzavajućeg napona. Ukoliko se mjerenje i akvizicija podataka vrši pomoću računara, ne treba ručno uključivati pećnicu, ona će se automatski uključiti.

Na slici 1.12 prikazana je tipična zavisnost anodne struje od ubrzavajućeg napona za Hg cijev za tri različita napona kočenja (counter) $U_2=1\text{ V}$, $1,5\text{ V}$, 2 V .



Slika 1.12. Tipične Frank-Hertzove krive zavisnosti anodne struje od ubrzavajućeg napona za tri različita napona kočenja za Hg cijev.

Energije pobuđenja atoma Hg i Ne mogu se odrediti iz udaljenosti između dva susjedna minimuma (ili maksimuma). Tipični ubrzavajući naponi koji dovode do pobuđenja atoma iz osnovnog u prvo pobuđeno stanje su: $4,9\text{ V}$ za Hg atome i $16,8\text{ V}$ za Ne atome.

Prezentacija i proračun mjerenih vrijednosti se osim putem računara može se provesti manuelno, preko osciloskopa ili XYt snimača. Iz tog razloga opisane su i ove eksperimentalne procedure.

Manuelna eksperimentalna procedura

Povezati komponente kako je ranije opisano i prikazano na slikama 1.8 i 1.10. Uključiti kontrolnu jedinicu. Pritiskom na tipku (3) izabrati opciju "manual". Parametri za datu cijev se mogu podesiti pritiskom na tipku (2) i zakretanjem rotirajućeg prekidača (13). Za Hg cijev pritiskom na tipku (4) uključiti pećnicu. Pokrenuti mjerenje pritiskom na tipku (5). Crveno LED svjetlo iznad tipke (4) će treperiti dok se ne postigne željena temperatura " T_{act} " s tolerancijom $\pm 2^\circ\text{C}$. Uključivanjem kontrolne jedinice instrument aktivira ranije definisane vrijednosti u skladu s korištenom cijevi. Za Ne cijev to su npr.

- $U_H = 5 \pm 0,5 \text{ V}$;
- $U_1 = (0\dots99,9) \text{ V}$;
- $U_2 = 6 \pm 1 \text{ V}$;
- $U_3 = 2 \pm 1 \text{ V}$;

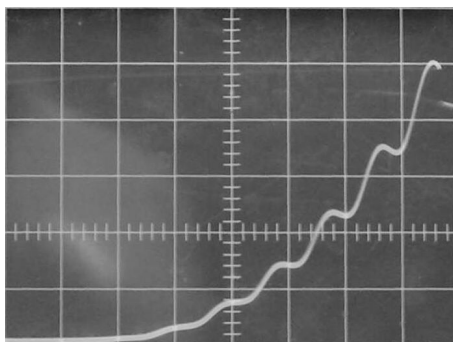
Za Hg cijev, napon grijanja je ranije podešen na 6,3 V, ubrzavajući napon je ograničen na 60 V.

- $T_{nom} = 175 \pm 10 \text{ }^\circ\text{C}$;
- $U_H = 6,3 \pm 0,5 \text{ V}$;
- $U_1 = (0\dots60) \text{ V}$;
- $U_2 = 2,0 \pm 0,5 \text{ V}$;
- U_3 se ne koristi za Hg-cijev.

U "manual" opciji rada, treba odabrati U_1 pritiskom na tipku (2) i zatim pritiskom na tipku (13) povećavati napon od 0 do $U_{1,max}$. Ako je struja prevelika kontrolna jedinica će automatski prekinuti mjerenje nakon sedam sekundi radi zaštite cijevi od mogućih oštećenja. Ukoliko se desi prekid mjerenja treba prilagoditi parametre za datu cijev i pritiskom na tipku (5) ponovo pokrenuti mjerenje. Da bi se izbjeglo pražnjenje, parametre U_3 i U_H treba smanjiti.

Eksperimentalna procedura korištenjem osciloskopa

Povezati komponente kako je ranije opisano i prikazano na slikama 1.8 i 1.10. Uključiti kontrolnu jedinicu. Povezati izlaze (7) i (8) na osciloskop i zatim odabrati XY način rada za osciloskop. Podesiti parametre za Hg ili Ne cijev kako je ranije opisano. Za Hg cijev uključiti grijanje. Uz pomoć tipke (3) odabrati "saw tooth". Pokrenuti mjerenje pritiskom na tipku (5). U načinu rada "saw tooth", naponi U_1 i U_2 se primjenjuju na Hg cijev s frekvencijom od 28 Hz. Tipična Frank-Hertzova kriva koja se dobije na osciloskopu je prikazana na slici 1.13.



Slika 1.13. Tipična slika na osciloskopu.

Eksperimentalna procedura korištenjem XYt snimača

Povezati komponente kako je ranije opisano i prikazano na slikama 1.8 i 1.10 i 1.8. Uključiti kontrolnu jedinicu. Pritiskom na tipku (3) odabrati opciju "ramp". Povezati izlaz (7) na Y ulaz snimača, a izlaz (8) na X ulaz. Podesiti parametre za Hg ili Ne cijev kako je ranije opisano. Za Hg cijev uključiti grijanje. Pritiskom na tipku (3) odabrati opciju "ramp". Pokrenuti mjerenje pritiskom na tipku (5). U "ramp" opciji rada, ubrzavajući napon se automatski povećava od 0 V do U_{1max} za 20 sekundi. Zeleno LED svjetlo iznad tipke (5) počće da trepće kada se dostigne maksimalna vrijednost ubrzavajućeg napona.

1.3 Praktičan rad

1. zadatak: Snimiti dijagram zavisnosti anodne struje elektronske cijevi punjene helijem od ubrzavajućeg napona pri naponima kočenja od 1,5 V, 2 V i 2,5 V.

Spojiti šemu kao na slici 1.4. Zagrijati cijev, zadati napon kočenja od 1,5 V, a zatim mijenjajući vrijednost ubrzavajućeg napona U između 0 V i 30 V očitati odgovarajuće vrijednosti anodne struje I . Za vrijednosti ubrzavajućeg napona između 0 V i 20 V ići s korakom 1 V, a između 20 V i 30 V s korakom 0,5 V. Popuniti tabelu 1.1 (po potrebi dodati još redova).

$U_K = 1,5 \text{ V}$	
$U \text{ (V)}$	$I \text{ (}\mu\text{A)}$
0	
1	
2	
\vdots	
20	
20,5	
21	
21,5	
\vdots	
29	
29,5	
30	

Tabela 1.1. Tabela za zadatak 1.

Isti postupak ponoviti za napone kočenja od 2 V i 2,5 V. Nacrtati zavisnost $I(U)$ za sva tri napona kočenja na istom grafiku. Uočiti maksimume.

2. zadatak: Snimiti voltampersku karakteristiku elektronske cijevi punjene helijem.

Spojiti šemu kao na slici 1.5. Zadajući vrijednosti ubrzavajućeg napona između 0 V i 30 V s korakom od 1 V, snimiti voltampersku karakteristiku za datu cijev. Popuniti tabelu 1.2 i na osnovu očitanih vrijednosti struje nacrtati grafik zavis-

nosti $I(U)$.

U (V)	I (μA)
0	
0,5	
1	
1,5	
\vdots	
29	
29,5	
30	

Tabela 1.2. Tabela za zadatak 2.

3. zadatak: Snimite dijagram zavisnosti anodne struje elektronske cijevi punjene neonom od ubrzavajućeg napona pri naponima kočenja od 2 V, 2,5 V i 3 V.

Spojiti Ne cijev s kontrolnom jedinicom Franck-Hertzovog eksperimenta kako je opisano u prethodnom poglavlju. Za napon kočenja 2 V snimite zavisnost anodne struje od ubrzavajućeg napona te u softveru očitati vrijednosti susjednih maksimuma U , izračunati njihove razlike ΔU i upisati u tabelu 1.3. Ponoviti mjerenja za druge napone kočenja (formirati iste tabele). Zatim izračunati srednju vrijednost ΔU_{sr} , uporediti s teorijskom vrijednošću, te izračunati relativnu grešku.

U (V)	ΔU (V)

Tabela 1.3. Tabela za zadatak 3.

4. zadatak: Snimite dijagram zavisnosti anodne struje elektronske cijevi punjene živom od ubrzavajućeg napona pri naponu kočenja od 2 V. Mjerenja izvršite na različitim temperaturama.

Spojiti Hg cijev s kontrolnom jedinicom Franck-Hertzovog eksperimenta kako je opisano u prethodnom poglavlju. Izvršite mjerenja za tri različite temperature grijanja Hg cijevi $\approx (180 \pm 5)^\circ \text{C}$. Koristeći softver očitati vrijednosti susjednih maksimuma U za svako mjerenje, upisati u tabelu 1.4, te izračunati ΔU_{sr} . Vrijednosti ΔU_{sr} izračunate eksperimentalno usporediti s teorijskom vrijednošću, te izračunati relativnu grešku.

U (V)	ΔU (V)

Tabela 1.4. Tabela za zadatak 4.

5. zadatak: *Diskutovati rezultate.*

Objasniti koje su razlike u radu analognom i digitalnom opremom. Zbog čega se analognom opremom detektuju samo dva maksimuma, a digitalnom pet-šest?

Da li se i kako kod helija i neona mijenja zavisnost anodne struje elektronske cijevi od napona ubrzanja za različite napone kočenja? Kako se ta zavisnost mijenja kod žive s porastom temperature? Da li je pri višim temperaturama zagrijavanja žive teže izdvojiti napone koji odgovaraju minimalnim vrijednostima struje i zašto?

Da li su eksperimentalno dobivene vrijednosti u skladu s onim teorijski izračunatim? Je li greška prihvatljivo mala?

Vježba 2

Proučavanje karakterističnih rendgenskih zraka

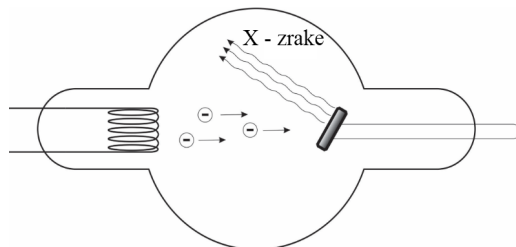
Zadaci:

1. Snimiti i analizirati spektar Cu anode koristeći monokristale LiF i KBr.
2. Snimiti i analizirati spektar Mo anode koristeći monokristale LiF i KBr.
3. Snimiti i analizirati spektar Fe anode koristeći monokristale LiF i KBr.

2.1 Teorijski uvod

2.1.1 Rendgenske zrake

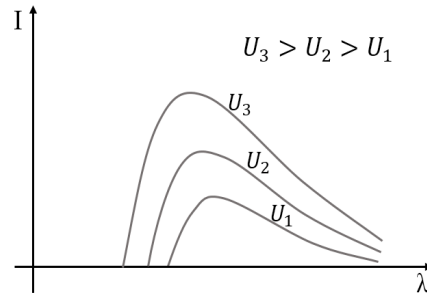
Wilhelm Röntgen (1845-1923) je 1895. godine otkrio nepoznato prodorno zračenje koje nastaje kad se brzi elektroni sudaraju s materijom. Mi danas poznajemo ovo zračenje kao rendgensko ili X-zračenje. Eksperimentalno je pokazano da se X-zrake prostiru po pravim linijama, da na njih ne djeluju električna i magnetna polja, da prolaze kroz neprovidne materijale, da uzrokuju sjaj fosforescentnih materijala i da vrše ekspoziciju fotografskih ploča. Što su brži dolazni elektroni, to je zračenje prodornije i veći mu je intenzitet. Iz eksperimenata je zaključeno da su X-zraci elektromagnetni talasi.



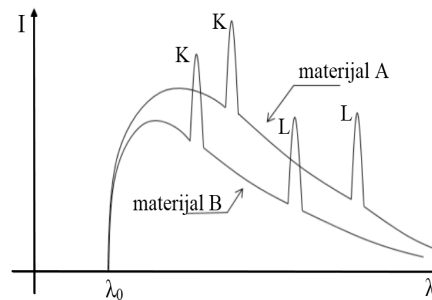
Slika 2.1. Šematski prikaz rendgenske cijevi.

Na slici 2.1 je prikazana rendgenska cijev koja sadrži spiralnu katodu i ravnu metalnu anodu. Zagrijana katoda emituje elektrone koje prema anodi ubrzava

razlika potencijala U . Anoda je nagnuta pod određenim uglom prema katodi. Cijev je evakuisana da bi se spriječili sudari elektrona s atomima gasa. U procesu sudara elektrona s atomima anode, najveći dio nastalog zračenja je toplotno zračenje. Samo mali procenat zračenja, između 1 – 3%, odlazi iz cijevi u vidu X-zraka. Spektar rendgenskog zračenja je prikazan na slikama 2.2 i 2.3. Izgled spektra zavisi od energije elektrona i materijala anode.



Slika 2.2. Intenzitet zračenja I u zavisnosti od talasne dužine λ za različite napone ubrzanja U_1 , U_2 i U_3 za isti materijal anode.



Slika 2.3. Intenzitet zračenja I u zavisnosti od talasne dužine λ za isti napon ubrzanja U za različite materijale anode A i B .

Razlikuju se dva dijela ovog spektra: **kontinuirani** i **linijski**. Na slici 2.2 prikazan je kontinuirani spektar koji se još zove **zakočno zračenje**, (njem. bremsstrahlung). Sve dok je energija upadnih elektrona mala, javlja se samo kontinuirani spektar. Sa slike se vidi da spektar ne kreće iz koordinatnog početka već uvijek postoji neka minimalna talasna dužina u kratkotalasnom području. Povećanjem ubrzavajućeg napona za isti materijal anode, smanjuje se minimalna talasna dužina, ali nikad ne dostiže vrijednost nule,

Linijski spektar, poznat i kao **karakteristični** ili **diskretni**, je superponiran na kontinuirani dio spektra i prikazan je u vidu pikova na slici 2.3. Sa slike se vidi da će za isti napon ubrzanja, intenzitet zračenja biti različit za različite materijale anode, ali će minimalna talasna dužina λ_0 za sve njih biti ista.

Eksperimentalno je nađena relacija koja utvrđuje vezu između λ_0 i napona ubrzanja U :

$$\lambda_0 = \frac{1241}{U}. \quad (2.1)$$

U gornjoj relaciji λ_0 je izraženo u nm, a U u voltima. Postojanje minimalne talasne dužine kontinuiranog dijela spektra objašnjeno je kvantnom teorijom. Naime, kontinuirani spektar nastaje usporavanjem elektrona u Coulombovom polju atomske jezgre pri čemu on gubi dio svoje energije. U ovom procesu elektron emituje foton čija je energija jednaka razlici kinetičkih energija prije i poslije sudara. Kinetička energija elektrona prije sudara E_k zavisi od ubrzavajućeg napona U i jednaka je

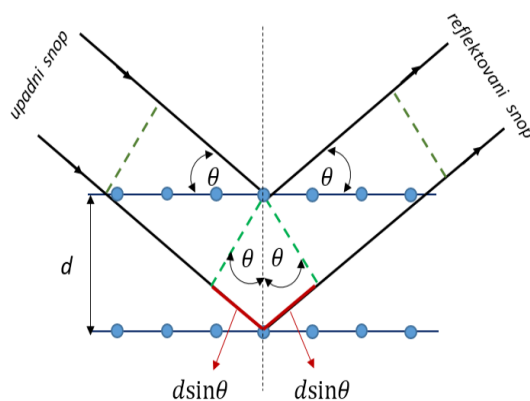
$$E_k = eU, \quad (2.2)$$

gdje je e naboj elektrona. Moguće je da elektron u interakciji s jezgrom izgubi svu svoju energiju. Tad nastaje foton minimalne talasne dužine λ_0 tj. maksimalne frekvencije ν_0 :

$$eU = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, \quad (2.3)$$

čime je potvrđena eksperimentalna relacija (2.1). U gornjoj relaciji h je Planckova konstanta, a c brzina svjetlosti u vakuumu.

Dodatne diskretne linije nastaju kad dolazni elektron ima dovoljnu energiju da izbiče neki od orbitalnih elektrona iz unutrašnje ljuske atoma. Prazno mjesto se vrlo brzo popunjava elektronom iz više ljuske, a višak energije se emituje u vidu fotona. Energija emitovanog fotona odgovara razlici energija više i niže ljuske. Budući da je ta razlika karakteristična za dati atom, rezultujuće zračenje naziva se i karakteristično X-zračenje.



Slika 2.4. Difrakcija rendgenskih zraka na kristalima.

Analiza X-zraka moguća je korištenjem monokristala. Kad X-zrake talasne dužine λ padnu na ravnine rešetke monokristala pod uglom θ (Braggov ugao), one se reflektuju i konstruktivno interferiraju pod uslovom da je njihova putna razlika Δ jednaka cjelobrojnom umnošku talasne dužine. U skladu sa slikom 2.4, Braggov zakon difrakcije rendgenskih zraka na kristalu glasi:

$$2d\sin\theta = n\lambda, \quad (2.4)$$

gdje je d rastojanje između kristalnih ravnina, a $n = 1, 2, \dots$ je red difrakcije. Ukoliko je rastojanje između ravnina d poznato, talasna dužina λ određuje se

preko ugla θ . Energija zračenja je onda:

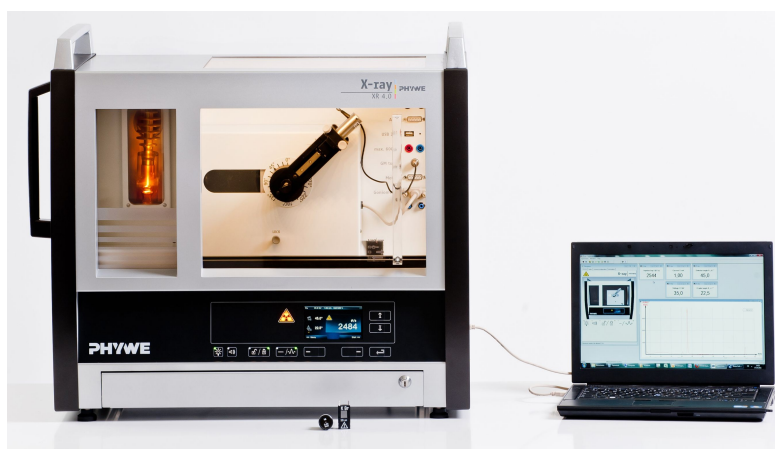
$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}. \quad (2.5)$$

Kombinacijom jednačina (2.4) i (2.5) dobijamo:

$$E = \frac{nhc}{2d\sin\theta}. \quad (2.6)$$

2.2 Uređaj i metodika rada

Eksperimentalna postavka prikazana je na slici 2.5.



Slika 2.5. Eksperimentalna postavka za snimanje karakterističnih rendgenskih zraka Cu, Mo i Fe.

Za izradu eksperimenta je potrebno:

- Phywe XR 4.0 Expert rendgenska jedinica, 35 kV,
- goniometar,
- Geiger-Müllerov brojač,
- XR 4.0 Bakarna (Cu), molibdenska (Mo) i željezna (Fe) cijev kao izvor X-zraka,
- XR 4.0 set za snimanje karakterističnog rendgenskog zračenja,
- apertura od 2 mm.

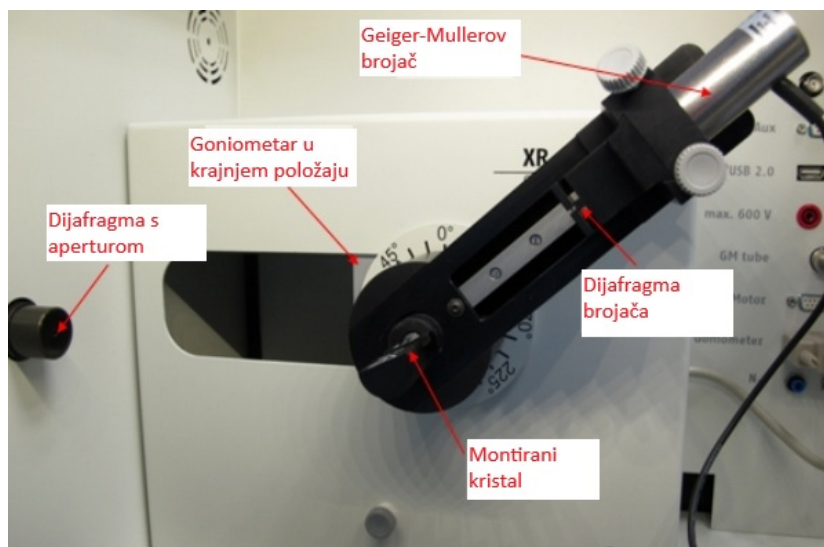
XR 4.0 rendgenska jedinica je povezana s računarom preko kojeg se kontroliše cijeli proces mjerenja preko odgovarajućeg softvera. Procedura snimanja je sljedeća:

1. Povezati goniometar i Geiger-Müllerov brojač na odgovarajuća mjesta u mornoj komori (vidjeti sliku 2.6).



Slika 2.6. Ulazi za goniometar i Geiger-Müllerov brojač označeni su crvenim isprekidanim linijama.

2. Goniometarski blok s izabranim kristalom postaviti u krajnji desni položaj. Pričvrstiti Geiger-Müllerov brojač na držač. Postaviti odabranu rendgensku cijev u komoru i instalirati aperturu dijametra 2 mm na izlaz iz cijevi (slika 2.7).



Slika 2.7. Postavljanje goniometra i dijafragme.

3. Nakon što su svi elementi postavljeni u komoru, izvršiti kalibraciju koristeći softver na mjernoj komori. Provjeriti da li je u parametre goniometra unesen odgovarajući kristal. Odabrati "Menu", "Goniometer" i "Autoca-

libration". Sada uređaj određuje optimalne međusobne položaje kristala i goniometra i položaj rendgenskih maksimuma.

4. Nakon kalibracije povezati mjernu komoru USB kablom s računarom. Pokrenuti program za mjerenje "Measure". Virtualna rendgenska komora će se pojaviti na ekranu računara i pritiskom ponuđenih opcija različiti parametri se mogu kontrolisati na ekranu. Alternativno, parametri se mogu podešavati i na stvarnoj rendgenskoj komori koja također ima svoj softver, kako je već ranije napomenuto. Softver na računaru će u tom slučaju automatski prihvatiti podešavanja.
5. Pritisnuti mišem na virtualnu komoru na računaru (crvena oznaka "For setting the goniometer" na slici 2.8) i promijeniti eksperimentalne parametre. Odabrati parametre kako slijedi:
 - "Mode": 1:2 coupling mode
 - "Crystal": LiF ili KBr
 - "Absorption": No absorption
 - "Detector angle": 8° za LiF, a 6° za KBr
 - "Crystal start angle": 4° za LiF, a 3° za KBr
 - "Crystal stop angle": 55° za LiF, a 75° za KBr
 - "Crystal increment": 0,1
 - "Integration time": 2s

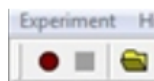


Slika 2.8. Dio korisničkog interfejsa u softveru.

6. Pritisnuti mišem na virtualnu rendgensku cijev na računaru (crvena oznaka "For setting the X-ray tube" na slici 2.8) i podesiti napon i struju cijevi. Odabrati parametre kako slijedi:
 - "Tube voltage": 35,0 kV

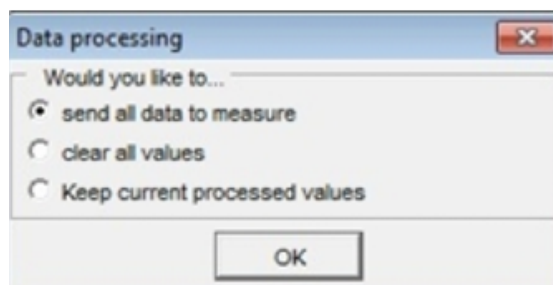
- "Emission current": 1,0 mA

7. Mjerenje pokrenuti pritiskom na crveni kružić u softveru (slika 2.9).



Slika 2.9. Pokretanje i prekid mjerenja u softveru.

8. Nakon završetka mjerenja pojavice se prozor kao na slici 2.10. Odaberi prvu ponudu ("send all data to measure") i potvrditi pritiskom na OK. Izmjerene vrijednosti direktno će se prebaciti u mjerni softver "Measure".



Slika 2.10. Spašavanje podataka nakon mjerenja.

Snimanje spektaraka se vrši na dva kristala, litij fluoridu (LiF) i kalij bromidu (KBr). Rastojanje između ravnina za LiF (200) je poznato i iznosi $d = 2,014 \cdot 10^{-10}$ m, a za KBr (200) $d = 3,290 \cdot 10^{-10}$ m. Isti eksperiment se može izvršiti uz pomoć rendgenske cijevi s bakarnom (Cu), molibdenskom (Mo) i željeznom (Fe) anodom.

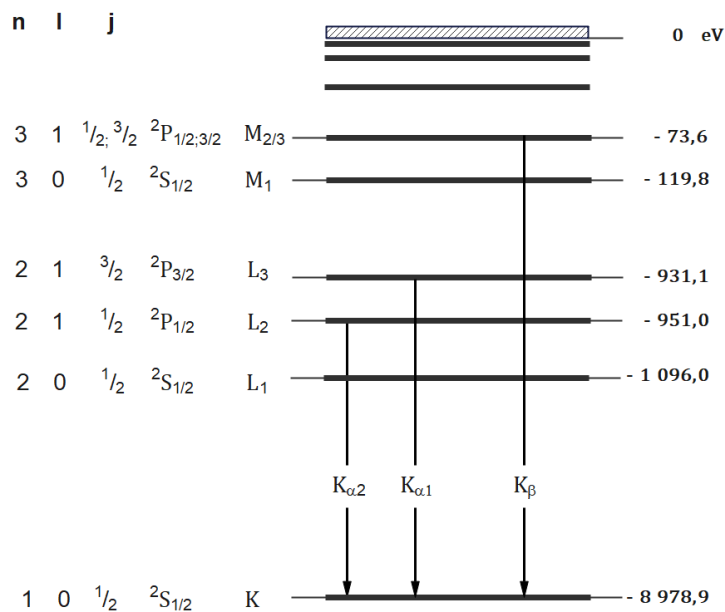
Cu spektar

Energetski nivoi Cu prikazani su na slici 2.11. Karakteristično X-zračenje koje nastaje nakon prelaza iz L u K ljusku naziva se K_α zračenje, dok se zračenje koje nastaje nakon prelaza iz M u K ljusku naziva K_β zračenje ($M_1 \rightarrow K$ i $L_1 \rightarrow K$ prelazi su zabranjeni zbog kvantno-mehaničkih pravila). Energije karakterističnih X-zraka Cu su:

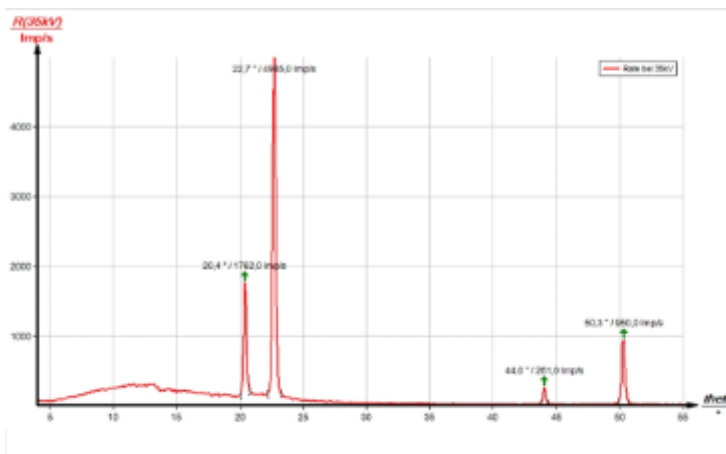
$$E_{K_\alpha} = E_K - \frac{1}{2}(E_{L_2} + E_{L_3}) = 8,038 \text{ keV} \quad (2.7)$$

$$E_{K_\beta} = E_K - E_{M_{2,3}} = 8,905 \text{ keV}.$$

Primjer spektara Cu koji je dobiven na LiF kristalu je dat na slici 2.12. Dva para linija vidljiva na datoj slici mogu se pripisati difrakcijama prvog i drugog reda ($n = 1$ i $n = 2$) i odgovaraju K_α i K_β linijama Cu. Ukoliko se koristi KBr kristal, dobiju se četiri para K_α i K_β linija koja odgovaraju različitim redovima difrakcije ($n = 1, n = 2, n = 3$ i $n = 4$).



Slika 2.11. Energetski nivoi Cu.



Slika 2.12. Primjer spektra Cu uz korištenje LiF kristala.

Mo spektar

Energije karakterističnih X-zraka Mo su:

$$E_{K_{\alpha}} = E_K - \frac{1}{2}(E_{L_2} + E_{L_3}) = 17,427 \text{ keV} \quad (2.8)$$

$$E_{K_{\beta}} = E_K - E_{M_{2,3}} = 19,590 \text{ keV}.$$

Za LiF kristal se mogu identifikovati tri para K_{α} i K_{β} linija koja odgovaraju različitim redovima difrakcije ($n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$). Zbog opadanja intenziteta spektra s povećanjem ugla, za $n = 1$ se može uočiti samo K_{α} linija. Kada se LiF

kristal zamijeni KBr kristalom mogu se dobiti linije do četvrtog reda difrakcije ($n = 1, n = 2, n = 3$ i $n = 4$), s tim što se za $n = 3$ i $n = 4$ vide samo K_α linije.

Fe spektar

Energije karakterističnih X-zraka Fe su:

$$\begin{aligned} E_{K_\alpha} &= E_K - \frac{1}{2}(E_{L_2} + E_{L_3}) = 6,3974 \text{ keV} \\ E_{K_\beta} &= E_K - E_{M_{2,3}} = 7,0580 \text{ keV}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Za LiF kristal se mogu identifikovati dva para K_α i K_β linija koja odgovaraju različitim redovima difrakcije ($n = 1, n = 2$), a za KBr kristal tri para linija za tri reda difrakcije ($n = 1, n = 2$ i $n = 3$).

U jednačinama (2.7), (2.8) i (2.9) E_{K_α} je srednja vrijednost energije K_{α_1} i K_{α_2} linija.

2.3 Praktičan rad

1. zadatak: Snimiti i analizirati karakteristični spektar X-zraka Cu anode koristeći monokristale LiF i KBr.

Snimiti spektar Cu na ranije opisan način koristeći kristal LiF. Iz snimljenog spektara očitati pripadajuće uglove θ , a zatim koristeći jednačinu (2.6) izračunati energije E_{K_α} i E_{K_β} .

LiF kristal	Linija	θ (°)	E (keV)
$n = 1$	K_α		
	K_β		
$n = 2$	K_α		
	K_β		

Tabela 2.1. Tabela za zadatak 1 uz korištenje LiF kristala.

KBr kristal	Linija	θ (°)	E (keV)
$n = 1$	K_α		
	K_β		
$n = 2$	K_α		
	K_β		
$n = 3$	K_α		
	K_β		
$n = 4$	K_α		
	K_β		

Tabela 2.2. Tabela za zadatak 1 uz korištenje KBr kristala.

Popuniti tabelu 2.1. Ispod tabele naći srednje vrijednosti energija E_{K_α} i E_{K_β} i upoređujući s teorijskim vrijednostima iz jednačina (2.7) naći relativne greške

mjerenja. Snimiti spektar Cu korištenjem KBr kristala i ponoviti istu proceduru kao i za kristal LiF. Popunite tabelu 2.2 i naći greške mjerenja u odnosu na teorijske vrijednosti.

2. zadatak: Snimiti i analizirati karakteristični spektar X-zraka Mo anode koristeći monokristale LiF i KBr.

Snimiti spektar Mo na ranije opisan način. Ponoviti proceduru iz prethodnog zadatka, popunite tabele 2.3 i 2.4, naći srednje vrijednosti energija i relativne greške poređenjem s teorijskim vrijednostima iz jednačina (2.8).

LiF kristal	Linija	θ ($^{\circ}$)	E (keV)
$n = 1$	K_{α}		
	K_{β}		
$n = 2$	K_{α}		
	K_{β}		
$n = 3$	K_{α}		
	K_{β}		
$n = 4$	K_{α}		

Tabela 2.3. Tabela za zadatak 2 uz korištenje LiF kristala.

KBr kristal	Linija	θ ($^{\circ}$)	E (keV)
$n = 1$	K_{α}		
	K_{β}		
$n = 2$	K_{α}		
	K_{β}		
$n = 3$	K_{α}		
$n = 4$	K_{α}		

Tabela 2.4. Tabela za zadatak 2 uz korištenje KBr kristala.

3. zadatak: Snimiti i analizirati karakteristični spektar X-zraka Fe anode koristeći monokristale LiF i KBr.

Snimiti spektar Fe na ranije opisan način. Ponoviti proceduru iz prethodnog zadatka, popunite tabele 2.5 i 2.6, naći srednje vrijednosti energija i relativne greške poređenjem s teorijskim vrijednostima iz jednačina (2.9).

LiF kristal	Linija	θ ($^{\circ}$)	E (keV)
$n = 1$	K_{α}		
	K_{β}		
$n = 2$	K_{α}		
	K_{β}		

Tabela 2.5. Tabela za zadatak 3 uz korištenje LiF kristala.

KBr kristal	Linija	θ ($^{\circ}$)	E (keV)
$n = 1$	K_{α}		
	K_{β}		
$n = 2$	K_{α}		
	K_{β}		
$n = 3$	K_{α}		
	K_{β}		

Tabela 2.6. Tabela za zadatak 3 uz korištenje KBr kristala.

Vježba 3

Termoelektronska emisija

Zadaci:

1. Snimiti i grafički prikazati voltampersku karakteristiku diode za različite struje grijanja katode.
2. Odrediti vrijednost izlaznog rada u Richardsonovoj formuli.
3. Provjeriti Langmuirovu formulu.
4. Snimiti karakteristiku magnetrona i odrediti iz dobivenih podataka veličinu specifičnog naboja elektrona.

3.1 Teorijski uvod

3.1.1 Termoelektronska emisija iz metala

Neka je dat metal u obliku pravougaone potencijalne jame. Elektroni mase m i naboja e popunjavaju energetska stanja do Fermijevog nivoa E_F , kao što je prikazano na slici 3.1. Prilikom zagrijavanja metala, neki elektroni dobivaju dovoljno energije da napuste metal i ova pojava je poznata kao termoelektronska emisija. Minimalna energija potrebna elektronu za napuštanje metala zove se izlazni rad (ϕ). Termoelektronska emisija može se proučavati pomoću elektronskih cijevi. Elektronska cijev je evakuisana cijev u kojoj kao izvor elektrona služi užarena katoda. Elektroni se usljed razlike potencijala šalju s katode prema anodi i tako nastaje termoelektronska struja koja raste do maksimalne vrijednosti (struje zasićenja) kada svi elektroni stignu s katode na anodu.

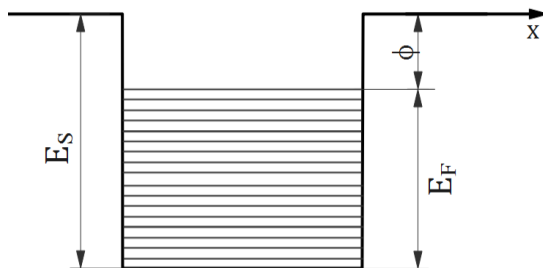
Kao što je prikazano na slici 3.1, da bi napustio potencijalnu jamu dubine E_S u pravcu x -ose, elektron mora imati impuls:

$$p_x \geq p_{x_0}, \quad (3.1)$$

gdje je

$$\frac{p_{x_0}^2}{2m} = E_S.$$

Međutim, čak i kada elektron posjeduje pri površini impuls $p_x \geq p_{x_0}$, to ne znači da će on sigurno napustiti metal, jer može biti reflektovan od strane potencijalne



Slika 3.1. Pravougaona potencijalna jama dubine E_S . Elektroni zauzimaju energetske nivoe do Fermijevog nivoa E_F . Veličina ϕ je izlazni rad.

barijere. Prema tome, vjerovatnoća izlaska iz metala za elektron koji zadovoljava uslov (3.1) iznosi

$$1 - r(p_x),$$

pri čemu je $r(p_x)$ koeficijent refleksije koji zavisi od p_x i od oblika potencijalne barijere.

Gustoća struje termoelektronske emisije I može se jednostavno izvesti korištenjem kvantne statističke fizike. Dobije se da je

$$I = AT^2 e^{-\frac{\phi}{kT}}, \quad (3.2)$$

gdje je

$$A = \frac{4\pi emk^2}{h^3}. \quad (3.3)$$

U gornjim jednačinama, e je naboj elektrona, h je Planckova konstanta, k je Boltzmanova konstanta, T je temperatura, a ϕ je izlazni rad. Jednačina (3.2) je poznata kao Dushman-Richardsonova jednačina. Izveli su je Owen Willans Richardson (1879-1959) i Saul Dushman (1883-1954).

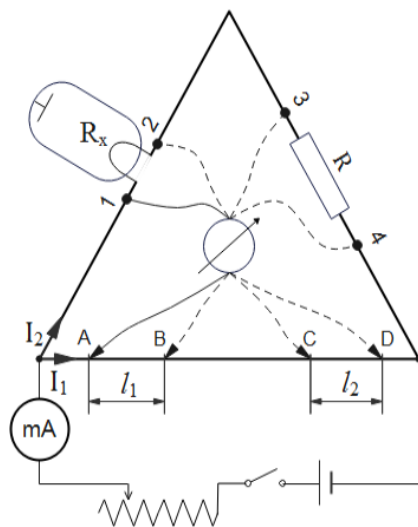
3.1.2 Mjerenje malih otpora po Matthiessenu i Hockinu

Mali nepoznati otpor R_x se može izmjeriti metodom koju su osmislili Augustus Matthiessen (1831-1870) i Charles Hockin (1840-1882) upotrebom običnog mosta, a da pri tome vezani provodnici i prelazni otpori ne prouzrokuju greške. Rad ovom metodom zahtijeva dosta pažnje i strpljenja, pošto pri jednom mjerenju otpora galvanometar treba postaviti u četiri razna položaja u kolu i četiri puta utvrditi položaj ravnoteže mosta (slika 3.2).

Prije početka mjerenja, poznati otpor R treba odabrati tako da bude približno jednak nepoznatom otporu R_x . Jedan kraj galvanometra redom se stavlja u položaje 1, 2, 3 i 4. Drugi kraj galvanometra vezan je za klizač potencijometra, kojim će se ravnoteža mosta postići u tačkama A, B, C i D, respektivno. Kao potencijometar služi otpornik u obliku žice konstantnog presjeka. Dakle, nepoznatom otporu R_x odgovaraće na potencijometru dužina žice ℓ_1 , a poznatom otporu R dužina ℓ_2 .

Naponi ovog sistema u sva četiri položaja, kada kroz galvanometar ne teče struja, su:

$$IR_x = I_1 R_1, \quad (3.4)$$



Slika 3.2. Most za mjerenje malih otpora.

$$IR = I_1 R_2. \quad (3.5)$$

Dijeljenjem ovih jednačina dobijemo

$$\frac{R_x}{R} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (3.6)$$

Pošto se kao potencijometar koristi otpornik u obliku žice konstantnog presjeka, otpori R_1 i R_2 direktno su proporcionalni dužinama žice ℓ_1 i ℓ_2 , pa slijedi

$$R_x = R \frac{\ell_1}{\ell_2}. \quad (3.7)$$

3.1.3 Određivanje reda veličine specifičnog naboja elektrona

Postoji nekoliko metoda za direktno i indirektno mjerenje specifičnog naboja elektrona $\frac{e}{m}$, gdje je m masa, a e naboj elektrona. Jedna od njih se zasniva na određivanju poluprečnika zakrivljenosti putanje elektrona u polju magnetne indukcije \vec{B} koje je okomito na brzinu elektrona. Na elektron brzine \vec{v} djeluje tad u Lorentzova sila \vec{F} (slika 3.3) intenziteta

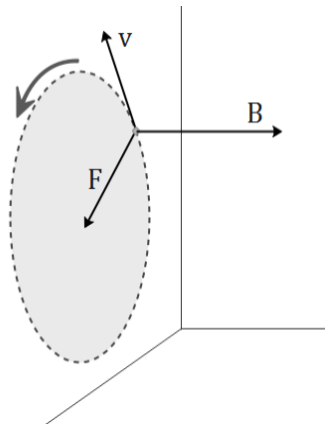
$$F = evB. \quad (3.8)$$

Pod uticajem sile, elektron opisuje kružnicu poluprečnika ρ koji se izračunava iz izraza za centripetalnu silu

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{\rho}. \quad (3.9)$$

S obzirom da je u ovom slučaju centripetalna sila upravo Lorentzova, iz jednačina (3.8) i (3.9) slijedi

$$evB = \frac{mv^2}{\rho}, \quad (3.10)$$



Slika 3.3. Kružna putanja elektrona pod uticajem Lorentzove sile u magnetnom polju okomitom na brzinu elektrona.

odnosno

$$\rho = \frac{1}{B} \frac{mv}{e}. \quad (3.11)$$

Elektron dobija brzinu v zbog razlike potencijala U . Rad električnog polja pretvoren je u kinetičku energiju elektrona, tako da vrijedi

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU. \quad (3.12)$$

Brzina iz jednačine (3.12) uvrštena u jednačinu (3.11) daje

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{\rho^2 B^2}. \quad (3.13)$$

Poznavajući napon koji je ubrzao elektron, magnetno polje koje mu zakrivljuje putanju i poluprečnik zakrivljenosti, može se naći specifični naboj.

3.2 Uređaj i metodika rada

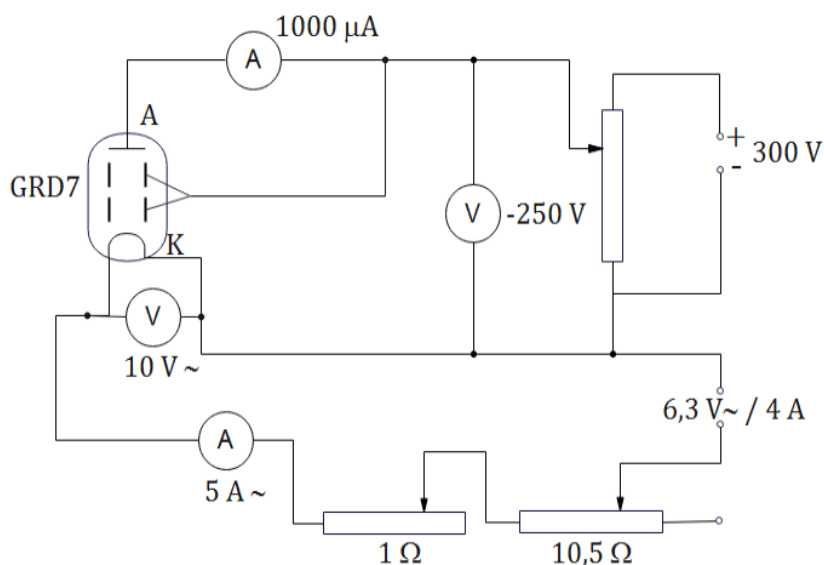
Mejrenja u ovoj vježbi vrše se uz pomoć industrijski načinjene Ferranti GRD7 vakuumske cilindrične diode koja je prikazana na slici 3.4. Dioda je pričvršćena na crno kućište na kojem su naznačene sve njene karakteristike i iz njega se tokom mjerenja neće vaditi. Dioda sadrži volframovu katodu (žarnu nit) koja je razapeta duž ose cilindra i koaksijalno postavljenu anodu. Katoda je dužine $\ell_k = 4,8$ cm i dijametra $d_k = 2r_k = 0,125$ mm. Termički koeficijent širenja volframa je $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$, a specifični otpor volframa je $\rho = 5,5 \cdot 10^{-6} \text{ } \Omega\text{cm}$. Dijametar anode je $d_a = 2r_a = 6,5$ mm, a dužina je $\ell_a = 14,5$ mm.

3.2.1 Snimanje voltamperske karakteristike diode

Za mjerenje voltamperske karakteristike diode za različite struje grijanja katode potrebno je spojiti šemu kao na slici 3.5. Nakon spajanja šeme snima se anodna



Slika 3.4. Dioda koja se koristi u vježbi.

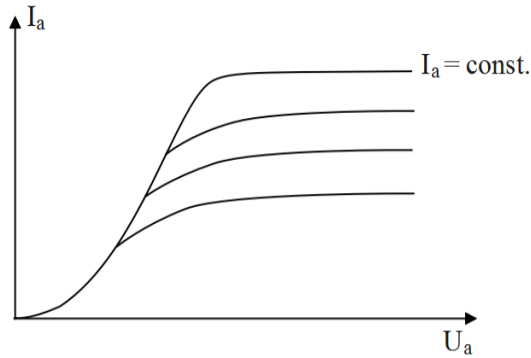


Slika 3.5. Šema za mjerenje struje zasićenja diode u zavisnosti od temperature katode.

struja I_a u zavisnosti od ubrzavajućeg napona napona U_a za različite struje grijanja katode.

Napon grijanja U_f i ubrzavajući napon U_a dobijaju se iz stabilizovanog ispravljача. Pomjeranjem klizača na reostatima od $1\ \Omega$ i $10,5\ \Omega$ biraju se različite struje grijanja. Svakoj od ovih struja odgovara napon grijanja U_f koji se očitava na voltmetru od $10\ \text{V}$. Vrijednosti napona U_f i I_f potrebno je bilježiti istovremeno i ove vrijednosti trebaju biti konstante tokom mjerenja. Zbog zagrijavanja, iz katode izlijeću elektroni koje privlači pozitivno naelektrisana anoda. Ubrzavajući napon U_a reguliše se pomjeranjem klizača potencijometra i biraju se vrijednosti u intervalu $0 - 250\ \text{V}$. Za svaki zadati napon U_a očitava se odgova-

rajuća vrijednost anodne struje I_a na ampermetru od $1000 \mu\text{A}$ (primijetiti da se radi o veoma malim strujama). Voltamperske karakteristike diode izgledaće kao na slici 3.6. Iz ovog grafika očitava se struja zasićenja termoelektronske emisije na mjestima gdje je približno konstantna.



Slika 3.6. Voltamperske karakteristike diode za različite struje grijanja katode.

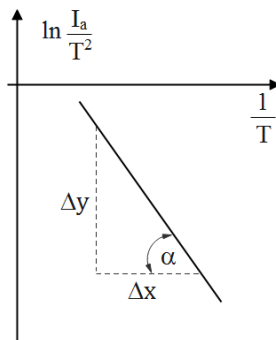
3.2.2 Određivanje izlaznog rada iz Richardsonove formule

Za određivanje izlaznog rada koristi se Dushman-Richardsonova jednačina (3.2). Ako se napiše u obliku

$$\frac{I_a}{T^2} = A e^{-\frac{\phi}{kT}},$$

i zatim logaritmirajmo, dobija se jednačina prave

$$\ln \frac{I_a}{T^2} = \ln A - \frac{\phi}{kT}. \quad (3.14)$$



Slika 3.7. Richardsonova formula svedena na linearnu zavisnost.

Iz nje se grafičkim putem određuje izlazni rad (slika 3.7) ukoliko je poznata temperatura katode. Nagib ove prave je

$$\text{tg } \alpha = \frac{\phi}{k},$$

odakle slijedi

$$\phi = k \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.15)$$

gdje je ϕ izlazni rad, a k Boltzmannova konstanta.

Određivanje temperature katode

Za različite struje grijanja, katoda se zagrijava na različite temperature koje se određuju prema postupku koji je opisan u nastavku. Prvo je potrebno izmjeriti sobnu temperaturu t pomoću termometra. Zatim se žarna nit katode preko odgovarajućih priključaka na kućištu diode vezuje u most, te se metodom Matthiessena i Hockina (jednačina (3.7)) određuje nepoznati otpor R_t na sobnoj temperaturi. Treba napomenuti da izmjereni otpor R_t osim otpora žarne niti katode $R_{t \text{ katode}}$ uključuje i otpora vodova $R_{t \text{ vodova}}$ kojima je žarna nit katode povezana sa priključcima na kućištu tj.

$$R_t = R_{t \text{ katode}} + R_{t \text{ vodova}}. \quad (3.16)$$

Pošto je vrijednost otpora R_t mala, u ovom slučaju se ne može zanemariti otpor vodova. Otpor žarne niti katode na sobnoj temperaturi t računa se iz jednačine

$$R_{t \text{ katode}} = \rho \frac{\ell_k}{S_k}, \quad (3.17)$$

gdje je $S_k = (d_k/2)^2 \pi$ poprečni presjek katode, a dužina ℓ_k i dijametar d_k katode su poznati i navedeni ranije u tekstu. Iz jednačine (3.16) se zatim izračunava otpor vodova

$$R_{t \text{ vodova}} = R_t - R_{t \text{ katode}}. \quad (3.18)$$

Vrijednost $R_{t \text{ vodova}}$ ostaje konstantna tokom mjerenja jer se vodovi ne griju (grije se samo žarna nit katode). Pošto je t ranije izmjereno, a $R_{t \text{ katode}}$ izračunato iz relacije (3.17), otpor žarne niti katode na temperaturi 0°C , R_0 , računa se iz relacije

$$R_{t \text{ katode}} = R_0 (1 + \alpha t), \quad (3.19)$$

gdje je α termički koeficijent širenja volframa (dat ranije u tekstu).

Konačno, temperatura žarne niti katode se za svaku struju grijanja računa iz jednačine (3.19) kao

$$t = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_{t \text{ katode}}}{R_0} - 1 \right).$$

Uzimajući u obzir relaciju (3.16) vrijedi

$$t = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_t - R_{t \text{ vodova}}}{R_0} - 1 \right).$$

U ovoj relaciji je

$$R_t = \frac{U_f}{I_f},$$

gdje je I_f struja grijanja, a U_f napon grijanja, pa je konačno

$$t = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\frac{U_f}{I_f} - R_{t \text{ vodova}}}{R_0} - 1 \right), \quad (3.20)$$

odnosno

$$T = t + 273 \text{ K.} \quad (3.21)$$

3.2.3 Provjera Langmuirove formule

Chlement D. Child (1868-1933) i Irving Langmuir (1881-1957) su na osnovu teorijskih razmatranja zaključili da struja u vakuumskoj cijevi raste s naponom kao

$$I_a = BU_a^{\frac{3}{2}}, \quad (3.22)$$

gdje je B konstanta. Logaritmiranjem ovog izraza (za bilo koju bazu) dobija se

$$\log I_a = \frac{3}{2} \log U_a + \log B, \quad (3.23)$$

Prikazivanjem $\log I_a$ kao funkcije od $\log U_a$, na grafiku se dobija prava liniju čiji je koeficijent pravca $\frac{3}{2}$.

3.2.4 Mjerenje specifičnog naboja elektrona

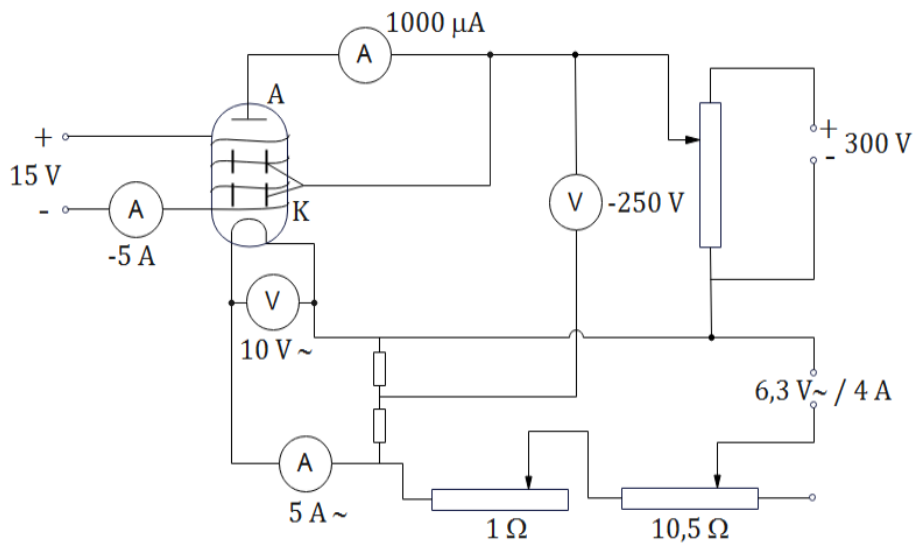
Za mjerenje specifičnog naboja elektrona dioda se postavlja u zavojnicu koja je prikazana na slici 3.8. Zavojnica je dužine $L = 6,23 \text{ cm}$ i ima $N = 2100$ namotaja. Ovakav uređaj naziva se magnetron.



Slika 3.8. Zavojnica koja se postavlja oko diode.

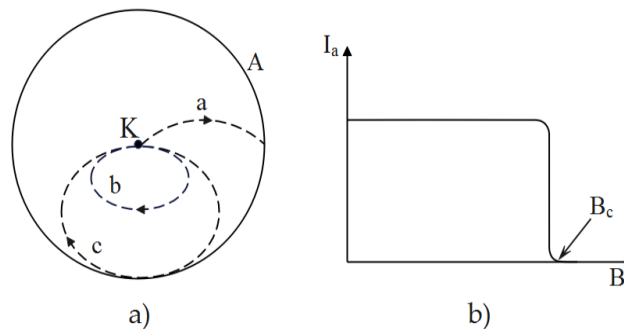
Za izradu ovog zadatka potrebno je spojiti šemu kao na slici 3.9. Zavojnica se napaja iz izvora od 15 V. Jačina ove struje se reguliše pomoću reostata, a kontroliše pomoću ampermetra. Potrebno je zagrijavati katodu odabranom strujom grijanja I_f da bi se ostvarila termoelektronska emisija s katode prema anodi.

Pretpostavimo da iz katode izlaze elektroni konstantnom brzinom v , okomitom na katodu. Između cilindra (anode) i niti katode nema električnog polja, već postoji homogeno magnetno polje B , paralelno s katodom. Jačina magnetnog polja je poznata i može se po volji mijenjati. Različite putanje elektrona (a), (b) i (c), prikazane na slici 3.10, zavise od jačine magnetne indukcije. Za male vrijednosti magnetne indukcije elektron stiže do anode po blago zakrivljenoj putanji (a) dok je za veće vrijednosti magnetne indukcije zakrivljenost putanje



Slika 3.9. Određivanje specifičnog naboja elektrona pomoću magnetrona.

elektrona (b) takva da se elektron vraća na katodu. Prema tome, promjenom jačine magnetnog polja anodna struja I_a se može uspostaviti ili prekinuti. Dok god je dijametar putanje elektrona veći od poluprečnika cilindra, svi elektroni stižu na anodu, pa se anodna struja može izmjeriti. Putanja elektrona (c) odgovara prekidu anodne struje pri kritičnom polju B_c . Na slici 3.10 je prikazana i zavisnost $I_a(B)$, s koje se može očitati vrijednost kritičnog polja B_c pri kojoj dolazi do nestanka struje.

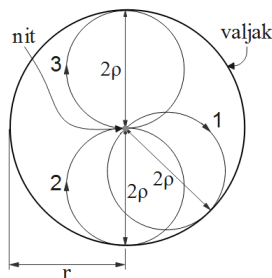


Slika 3.10. a) Putanje elektrona u magnetnom polju. b) Zavisnost anodne struje od jačine magnetne indukcije.

Vidi se da je prekid struje postepen, a to se dešava zbog različitih razloga. Neki od njih su:

- zbog toplotnog kretanja svi elektroni nemaju istu početnu brzinu;
- ako je nit direktno grijanja, potencijal duž niti i razlika potencijala između niti i rešetke koja ubrzava elektrone nije konstantna;

- geometrijski smještaj dijelova diode i njihov geometrijski oblik nisu savršeni;
- rešetka nije tačno centrirana u valjku, pa se radijus cilindra r mijenja od mjesta do mjesta;
- magnetno polje nije savršeno paralelno s osom rešetke.



Slika 3.11. Šematski prikaz putanja elektrona koji napuštaju katodu u homogenom magnetnom polju.

Za kritično polje B_c koje predstavlja granicu između protoka i prekida anodne struje, putanje elektrona su kružnice dijametara 2ρ (slika 3.11). Dok god je dijametar 2ρ putanje elektrona veći od poluprečnika r cilindra, svi elektroni stižu na cilindar (anodu), pa između niti i cilindra teče stalna struja koja se može mjeriti. Sa slike 3.11 se vidi da je radijus cilindra r jednak dijimetru putanje elektrona 2ρ . Odatle je

$$\rho = \frac{r}{2} = \frac{r_a - r_k}{2}, \quad (3.24)$$

gdje su r_a i r_k radijusi katode i anode respektivno. Pošto je radijus katode veoma mali u poređenju s radijusom anode, neće biti velika greška ako se aproksimativno uzme da vrijedi $\rho = \frac{r}{2} = \frac{r_a}{2}$. Poraste li magnetno polje dovoljno da 2ρ postane manje od r , nijedna putanja ne doseže više do valjka i struja pada na nulu. Uvrštavanjem vrijednosti ρ iz jednačine (3.24) u jednačinu (3.13), dobija se

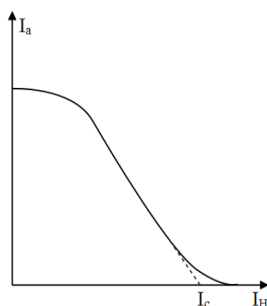
$$\frac{e}{m} = \frac{8U}{r^2 B_c^2}. \quad (3.25)$$

Magnetna indukcija može se izraziti kao

$$B_c = \mu_0 n I_c.$$

U ovoj relaciji $n = \frac{N}{L}$ predstavlja broj namotaja zavojnice po jedinici dužine, a I_c je kritična vrijednost struje koja se propušta kroz zavojnicu. I_c odgovara kritičnoj vrijednosti magnetne indukcije zavojnice B_c i može se odrediti grafičkim putem u presjeku tangente na krivu I_a i x -ose kao što je prikazano na slici 3.12. Uvrštavanjem izraza za B_c u relaciju (3.25) konačno se dobija

$$\frac{e}{m} = C \frac{U}{I_c^2}, \quad (3.26)$$



Slika 3.12. Grafičko određivanje kritične jačine struje.

gdje je sa C označen konstantni faktor

$$C = \frac{8}{\mu_0^2 n^2 r^2}$$

kojeg je radi lakšeg računanja zgodnije unaprijed izračunati. Ovdje je μ_0 permeabilnost vakuuma.

3.3 Praktičan rad

1. zadatak: *Snimiti i grafički prikazati voltampersku karakteristiku diode za različite struje grijanja katode.*

Spojiti šemu kao na slici 3.5. Prema proceduri opisanoj u prethodnom poglavlju izabrati struje grijanja: $I_f = 1,5 \text{ A}; 1,6 \text{ A}; 1,7 \text{ A}; 1,8 \text{ A}; 1,9 \text{ A}; 2 \text{ A}$. Za svaku struju grijanja zabilježiti vrijednosti napona U_f . Podatke mjerenja upisati u tabelu 3.1 (po potrebi dodati još redova). Na osnovu dobijenih vrijednosti nacrtati grafik kao na slici 3.10.

$I_f =$ $U_f =$	
U_a (V)	I_a (A)

Tabela 3.1. Tabela za zadatak 1.

2. zadatak: *Odrediti vrijednost izlaznog rada prema Richardsonovoj formuli.*

U ovom zadatku, na osnovu podataka koji su dobijeni u 1. zadatku crta se grafik kao na slici 3.7, a zatim određuje izlazni rad prema formuli (3.15). Vrijednosti struje i napona grijanja (I_f i U_f) uzimaju se iz tabele 3.1. Vrijednost struje zasićenja I_a očitava se s grafika iz 1. zadatka, u dijelu gdje je ona približno

konstantna (kao što je pokazano na slici 3.10). Otpor R_t i temperatura katode t izračunavaju se kako je opisano u prethodnom poglavlju jednačinom (3.21). Svi podaci se unose u tabelu 3.2 (po potrebi dodati još redova).

I_f (A)	U_f (V)	I_a (μ A)	R_t (Ω)	t ($^{\circ}$ C)	T (K)	$\frac{1}{T}$ (10^{-4} K $^{-1}$)	$\frac{I_a}{T^2}$ (10^{-11} $\frac{\text{A}}{\text{K}^2}$)	$\ln \frac{I_a}{T^2}$

Tabela 3.2. Tabela za zadatak 2.

3. zadatak: *Provjeriti Langmuirovu formulu.*

Ispravnost izraza (3.23) može se provjeriti logaritmiranjem vrijednosti I_a i U_a iz tabele 3.1 (za izabrani napon grijanja U_f odabrati pet ili šest vrijednosti ubrzavajućeg napona i očitati odgovarajuće anodne struje). Popuniti tabelu 3.3. Grafički prikazati zavisnosti $\log I_a$ od $\log U_a$, očitati koeficijent pravca i uporediti s teorijskom vrijednošću.

		$I_f =$		$U_f =$	
I_a (mA)	$\log I_a$ (mA)	U_a (V)	$\log U_a$ (V)		

Tabela 3.3. Tabela za zadatak 3.

4. zadatak: *Snimiti karakteristiku magnetrona i iz dobivenih podataka odrediti veličinu specifičnog naboja elektrona.*

Spojiti električno kolo kao na slici 3.9. Pri konstantnoj vrijednosti ubrzavajućeg napona U_a i struje grijanja I_f snimiti zavisnost anodne struje I_a od struje I_H koja se propušta kroz kalem. Podatke unijeti u tabelu 3.4 (dodati još redova ukoliko je potrebno). Za konstantnu vrijednost ubrzavajućeg napona zadaju se tri vrijednosti iz sljedećeg niza: $U_a = 10$ V; 15 V; 20 V; 25 V; 30 V; 35 V; 40 V, a za I_f se obično uzimaju vrijednosti $I_f = 1,5$ A; 1,6 A; 1,7 A.

Na osnovu podataka iz tabele nacrtati grafik 3.12. Dio, u kojem je kriva približno linearna, produžiti do presjeka s apscisom I_H . Vrijednosti struje I_c koja se tu očitava odgovara kritična vrijednost magnetnog polja zavojnice. Specifični naboj elektrona računa se po obrascu (3.25).

$I_f =$	$U_a =$
I_H (A)	I_a (A)

Tabela 3.4. Tabela za zadatak 4.

Vježba 4

Termoelektrične pojave u poluprovodnicima

Zadaci:

1. Odrediti otpor termoelektrične baterije.
2. Odrediti Seebeckov koeficijent za spoj Bi-Te.
3. Odrediti toplotnu provodljivost termoelektrične baterije.
4. Odrediti Seebeckov koeficijent n- i p-tipa poluprovodnika u funkciji srednje temperature.
5. Propuštanjem struje izmjeriti temperaturnu razliku između toplog i hladnog kraja poluprovodničkog termoelementa.

4.1 Teorijski uvod

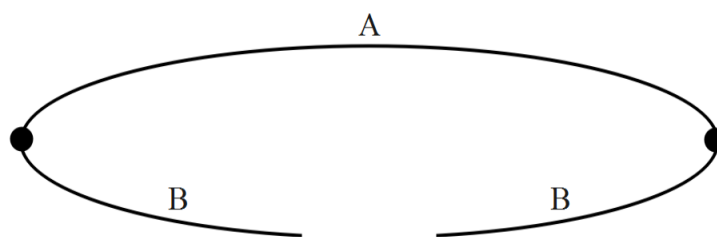
4.1.1 Termoelektrični efekat

Termoelektrični efekat je pretvaranje temperaturne razlike u električni napon i obrnuto, uz upotrebu termoelementa. Prvi termoelektrični efekat otkrio je 1821. godine Thomas Johanh Seebeck (1770-1831). On je pokazao da se zagrijavanjem spoja dva različita provodnika može proizvesti elektromotorna sila. Seebeckov efekat se može demonstrirati spajanjem dva različita metala na jednom kraju (npr. bakra i željeza) dok im se slobodni krajevi mogu priključiti na galvanometar ili osjetljivi voltmetar. Zagrijavanjem spoja metala registruje se mali napon. Ovakav spoj različitih metala A i B naziva se termopar (termočlanak, termoelement) i prikazan je na slici 4.1.

Vrijednost termoeletričnog napona je proporcionalna temperaturnoj razlici toplog i hladnog kraja termopara. Koeficijent proporcionalnosti α zove se Seebeckov koeficijent i definisan je relacijom

$$U = \alpha(T_h - T_c), \quad (4.1)$$

gdje je U napon na krajevima koji se javlja usljed temperaturne razlike toplog i hladnog kraja $\Delta T = T_h - T_c$. Ovdje je T_h temperatura toplog, a T_c temperatura hladnog kraja.



Slika 4.1. Termopar- spoj metala A i B.

Trinaest godina nakon Seebeckovog otkrića, francuz Jean Peltier (1785-1845) zapazio je drugi termoelektrični efekat. Otkrio je da propuštanjem električne struje kroz termopar može doći do efekta zagrijavanja ili hlađenja u zavisnosti od smjera struje. Peltierov efekat je dosta teško demonstrirati korištenjem metalnih termoparova jer ga uvijek prati oslobađanje Joulove toplote. Peltierov koeficijent π se definiše relacijom

$$Q = \pi I, \quad (4.2)$$

gdje je Q toplota otpuštena u jedinici vremena, a I je električna struja propuštena kroz termopar. Peltierov i Seebeckov koeficijent povezani su relacijom

$$\pi = \alpha T. \quad (4.3)$$

Čini se da nije odmah shvaćeno da su Seebeckov i Peltierov efekat međusobno zavisni. Ovu zavisnost prepoznao je 1855. godine William Thomson (1824-1907), koji je kasnije postao lord Kelvin. Primjenom termodinamike, uspio je uspostaviti vezu između Seebeckovog i Peltierovog efekta. Njegova teorija je također pokazala da mora postojati i treći termoelektrični efekat, koji se javlja u homogenim provodnicima. Ovaj efekat, poznat pod nazivom Thomsonov efekat, sastoji se od reverzibilnog zagrijavanja i hlađenja kada postoji i protok električne struje i temperaturni gradijent. Činjenica da se Seebeckov i Peltierov efekat pojavljuju samo na spojevima različitih metala sugerise da su to međufazni fenomeni, ali oni ustvari zavise od bulk osobina upotrijebljenih materijala.

Električnu struju u metalima uzrokuju elektroni koji imaju različite energije u različitim materijalima. Kada struja prelazi iz jednog materijala u drugi, transport energije putem elektrona se mijenja, a razlika se pojavljuje u vidu hlađenja ili zagrijavanja spoja, što predstavlja Peltierov efekat. Isto tako, kada se spoj zagrijava, elektronima je omogućeno da prelaze iz materijala u kojem imaju manju energiju u materijal gdje im je energija veća, što dovodi do pojave elektromotorne sile.

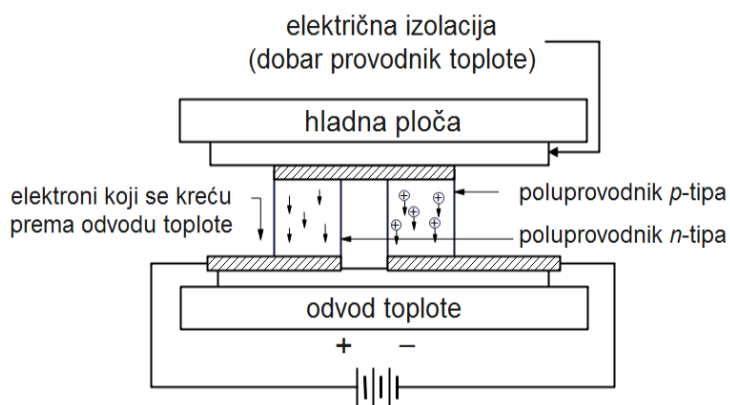
Thomsonov rad je pokazao da je termopar jedan vid toplotne mašine i da se može koristiti ili u uređajima za generisanje elektriciteta iz toplote, ili kao toplotna pumpa ili hladnjak. Međutim, zbog činjenice da su reverzibilni termoelektrični efekti uvijek praćeni ireverzibilnim pojavama kao što je Joulovo zagrijavanje i termalna vodljivost, termoparovi su dosta neefikasni kao toplotne mašine, ali se često koriste za mjerenje temperature. Problem konverzije energije korištenjem termoparova analizirao je Edmund Altenkirch (1880-1952) 1911. godine. Pokazao je da se performanse termopara mogu poboljšati povećanjem

električne vodljivosti dvaju metala i smanjenjem njihove termalne vodljivosti. Na žalost, u to doba nije postojao termopar s dovoljno dobrom kombinacijom ovih osobina da bi se postigla efikasna konverzija energije, iako se Seebeckov efekat dugo koristio za mjerenja temperature i za detekciju termalne radijacije. Tek 1950-ih godina prošlog vijeka počela je upotreba poluprovodnika kao termoelektričnih materijala što je omogućilo praktičnu izvedbu Peltierovih hladnjaka.

Rad na poluprovodničkim termoparovima također je doveo do konstrukcije termoelektričnih generatora s dovoljno visokom efikasnošću za specijalne aplikacije. Međutim, performanse termoelektričnih energetske pretvarača su ostale inferiorne u odnosu na najbolje konvencionalne mašine. Sve do kraja dvadesetog vijeka napredak u razvoju termoelektričnih materijala je bio dosta mali. Posljednih godina, došlo je do razvoja novih ideja za poboljšanje materijala i napravljen je značajan napredak, barem u domenu korištenja u laboratorijama. Razumno je očekivati da će ovaj rad uskoro dovesti do šire primjene termoelektričnih efekata.

4.1.2 Termoelektrični generator (termoelektrična baterija)

Termoelektrična baterija (generator) služi za konverziju toplote u električnu energiju. Za njenu izvedbu obično se koristi poluprovodnički termoelektrični par prikazan na slici 4.2. Električna struja teče kroz n-tip i p-tip poluprovodnika, a također i kroz provodnike koji povezuju izvor i dva poluprovodnika. Usljed Peltierovog efekta toplota će se prenositi s gornjeg na donji dio termoelektričnog para. Može se dobiti i veći prenos toplote pomoću kombinacije nekoliko termoelektričnih parova, kao što je prikazano na slici 4.3, gdje je nekoliko parova električno vezano u seriju, a termički u paralelu.

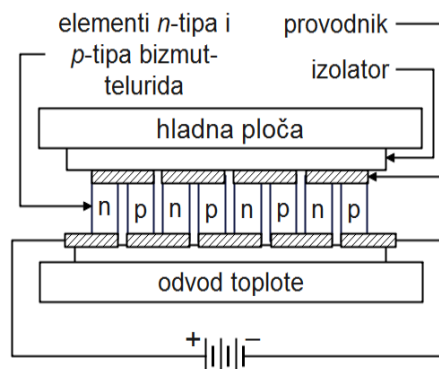


Slika 4.2. Presjek tipičnog termoelektričnog para.

Gornji dio uređaja (na obje gore pomenute slike) naziva se hladna ploča, jer se ona usljed Peltierovog efekta hladi. Veća temperaturna razlika između gornjeg i donjeg dijela uređaja može se ostvariti postavljanjem dvije ili više termoelektrične baterije jedne na drugu.

Hlađenje Q na gornjem kraju baterije je

$$Q = \alpha IT_c - \frac{1}{2} I^2 R - K(T_h - T_c), \quad (4.4)$$



Slika 4.3. Izgled tipične termoelektrične baterije. Elementi su električki vezani u seriju, a termički paralelno.

gdje je I struja dobijena iz izvora, R električni otpor baterije, K toplotna provodljivost, T_c temperatura hladne ploče, T_h temperatura toplog odvoda (donji kraj baterije), a α Seebeckov koeficijent koji je ranije definisan.

Sada će biti dato pojednostavljeno izvođenje jednačine (4.4). Pod pretpostavkom da je termoelektrična baterija, prikazana na slici 4.3, idealni hladnjak, hlađenje gornjeg kraja baterije je tada

$$Q_c = \alpha T_c I, \quad (4.5)$$

a to je upravo prvi član jednačine (4.4). Proporcionalnost hlađenja s jačinom struje je očita jer nosioci struje (slika 4.2) prenose toplotnu energiju s hladne ploče do tople ploče (donji kraj baterije).

Jednačinu (4.5) treba modifikovati za slučaj realnog hladnjaka. Prva modifikacija uzrokovana je Jouleovom toplotom koja se izdvaja u poluprovodniku kojim teče struja jačine I :

$$Q_R = I^2 R, \quad (4.6)$$

gdje je R otpor poluprovodnika. Može se uzeti da će polovina ove količine toplote, tj. $\frac{1}{2}I^2 R$, teći prema hladnoj ploči baterije i smanjivati joj hlađenje. Druga polovina izdvojene toplote teći će prema odvodu toplote i doprinijeti zagrijavanju donje ploče.

Druga modifikacija jednačine (4.5) potrebna je zbog temperaturnog gradijenta koji postoji duž termoelektrične baterije. Količina toplote Q će teći kroz bateriju od toplog kraja prema hladnom na osnovu poznate relacije

$$Q = K(T_h - T_c), \quad (4.7)$$

gdje su simboli uzeti kao u jednačini (4.4).

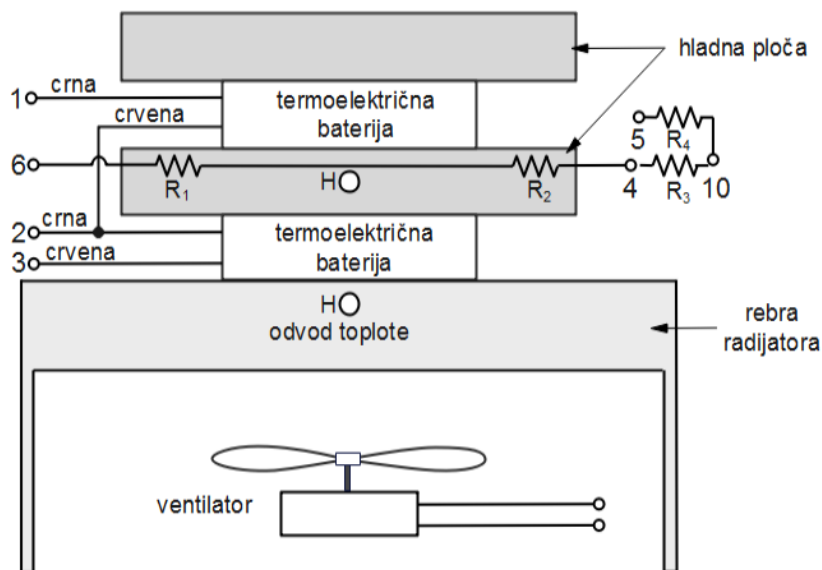
Oba toplotna fluksa Q_R i Q smanjit će hlađenje hladne ploče. Stoga jednačine (4.6) i (4.7) treba oduzeti od jednačine (4.5), što daje jednačinu (4.4).

Iz jednačine (4.4) se vidi da poluprovodnik koji se koristiti za termoelektričnu bateriju treba da ima sljedeća svojstva:

1. veliki Seebeckov koeficijent α , da se postigne maksimalno hlađenje;

2. mali električni otpor R da se smanji Jouleova toplota;
3. malu toplotnu provodljivost K da se smanji protok toplote kroz materijal.

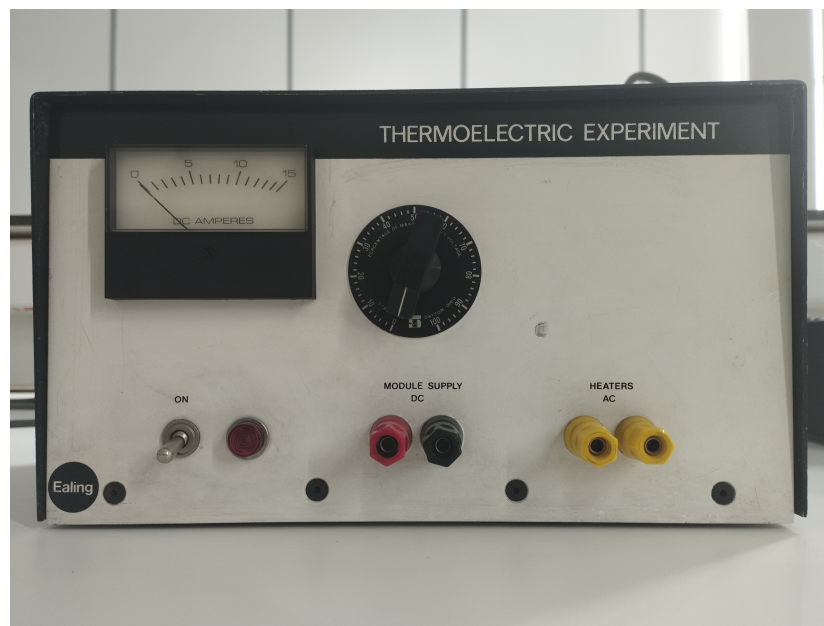
4.2 Uređaj i metodika rada



Slika 4.4. Šematski prikaz termoelektričnog aparata.

U ovoj vježbi se koristi termoelektrični aparat s dvije termoelektrične baterije čija je šema prikazana na slici 4.4. Gornja termoelektrična baterija je stegnuta između dvije aluminijske hladne ploče, a donja termoelektrična baterija između hladne ploče i ploče za odvod toplote. Otpornici R_1 i R_2 su ugrađeni u donju hladnu ploču, a na izvjesnoj udaljenosti od hladnog bloka montirani su i otpornici R_3 i R_4 . Svi otpornici imaju vrijednost otpora od po $1\ \Omega$, služe kao grijači i mogu se različito kombinovati.

Termoelektrični aparat se povezuje sa ispravljačem koji je prikazan na slici 4.5. Baterije se napajaju istosmjernom strujom iz ulaza ispravljača označenog s "MODULE SUPPLY DC" i koja se može regulisati između 0 i 15 A. Napajanje baterija može biti odvojeno ili u seriji preko priključaka 1, 2 i 3 prikazanih na slici 4.4. Otpornici se napajaju naizmjeničnim naponom od 6,3 V koji se obezbjeđuje iz ulaza ispravljača označenog s "HEATERS AC". Da se postigne hlađenje, pozitivni priključak ispravljača mora biti vezan za crveni vod termoelektrične baterije. Kod normalnog rada toplota se transportuje s gornjeg kraja aparata prema donjem kraju u rebra radijatora, odakle se uz pomoć ventilatora raspršuje u okolinu. Otvori u hladnoj ploči i ploči za odvod toplote, označeni s "H" na slici 4.4, služe za stavljanje živinih termometara.



Slika 4.5. Ispravljač za napajanje i zagrijavanje termoelektrične baterije.

Upozorenje!

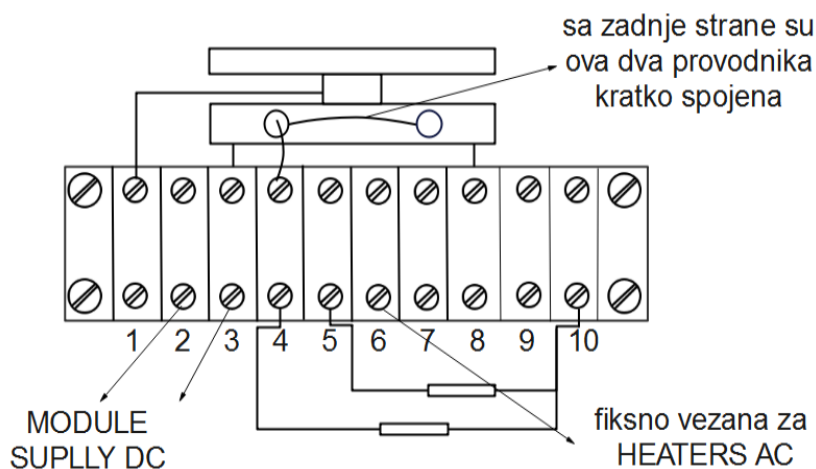
Nijedan dio termoelektričnog aparata ne smije se zagrijati iznad 100 °C. Legura koja povezuje dijelove termoelektrične baterije topi se na 117 °C. **Zato ventilator mora biti stalno uključen.** Termoelektrične baterije mogu se napajati strujom čija jačina prelazi za 50% optimalnu vrijednost struje $I_0 = 9 \text{ A}$, znači s cca 13 A.

4.2.1 Određivanje električnog otpora termoelektrične baterije

Priključci 2 i 3 donje termoelektrične baterije, prikazani na slici 4.6, vezuju se na ulaze ispravljača "MODULE SUPPLY DC". Na njima se paralelno priključuje digitalni voltmetar "KEITHLEY 171 DIGITAL MULTIMETER" (ulazi LO i HI), čiji preklopnik treba da stoji na području 10 V. U gornji otvor termobaterije stavlja se štapni termometar (do 100 °C). Električni otpor donje termoelektrične baterije određuje se mjerenjem pada napona na krajevima baterije pri zadanoj vrijednosti struje. Pad napona treba izmjeriti što brže, tj. prije nego što se uspostavi znatnija temperaturna razlika na bateriji. Električni otpor se izračunava iz Ohmovog zakona kao

$$R = \frac{U}{I}. \quad (4.8)$$

Za vrijeme ovog mjerenja donja hladna ploča se ne smije zagrijavati pomoću ugrađenih otpornika.



Slika 4.6. Šema za zagrijavanje termoelektrične baterije.

4.2.2 Određivanje Seebeckovog koeficijenta za spoj Bi-Te

Da bi se odredio Seebeckov koeficijent termobaterije, prvo se struja na ispravljaču iz ulaza "MODULE SUPPLY DC" svede na nulu, a ulazi "HEATERS AC" se iskoriste kao izvor napajanja. Sada kroz bateriju ne protiče struja, a između toplog i hladnog kraja baterije se uspostavlja temperaturna razlika pomoću otpornika R_1 , R_2 , R_3 i R_4 i prisilne konvekcije koju ostvaruje ventilator na donjoj ploči za odvod toplote.

Jedan kabl s ulaza "HEATERS AC" ispravljača se fiksno vezuje za priključak 6 na termoelektričnoj bateriji (slika 4.6) i ne dira se tokom mjerenja, a drugi kabl se može premiještati na mjesta označena s 4, 5 ili 10, što omogućava različite kombinacije otpornika R_1 , R_2 , R_3 i R_4 i daje različite temperature zagrijavanja toplog kraja termoelektrične baterije. Kad je priključak 6 fiksiran, kombinacije otpornika daju sljedeće vrijednosti ukupnog otpora (vidjeti sliku 4.4):

1. priključak 5 - 4Ω ,
2. priključak 10 - 3Ω ,
3. priključke 4 i 5 kratko spojiti; kontakt zadržati na priključku 10 - $2,5 \Omega$,
4. priključak 4 - 2Ω .

Odgovarajuće vrijednosti termoelektromotorne sile (TEMS) očitavaju se na voltmetru "160 DIGITAL MULTIMETAR" koji se paralelno spaja na korištene priključke termoelektrične baterije. Temperature toplog i hladnog kraja termobaterije se očitavaju s termometara koji se umeću u otvore u donjoj i gornjoj ploči.

Upozorenja!

- * Paziti da temperatura na štapnom termometru ne pređe 100°C .
- * Paziti da se ni u jednom od navedenih slučajeva krokodilke ne doirnu.

* Svaki put kada se postavi jedna od kombinacija treba sačekati da se temperature stabilizuju, za šta je potrebno otprilike 25 do 30 min.
 * Paziti da se ne zaklanja struja vazduha radijatora prilikom očitavanja, jer se odmah opaža nestabilnost podataka (opadanje temperatura).

Poznavajući napon U i očitavajući temperaturnu razliku na termometrima, Seebekov koeficijent termobaterije α može se izračunati iz jednačine (4.1). Pošto se termobaterija sastoji od 64 termočlanka bizmut-telurida (BiTe), Seebekov koeficijent za spoj Bi-Te se može dobiti kao

$$\alpha_{Bi-Te} = \frac{\alpha}{64}. \quad (4.9)$$

4.2.3 Određivanje toplotne provodljivosti termoelektrične baterije

Toplotna provodljivost donje termobaterije K izračunava se iz jednačine (4.7). Nije potrebno vršiti nova mjerenja jer se razlike temperatura preuzimaju iz prethodnog zadatka.

Količina toplote Q , koja teče kroz bateriju može se izračunati jer se pretpostavlja da vrijedi

$$Q \approx P, \quad (4.10)$$

gdje je P snaga koja se oslobađa na termobateriji. Snaga se računa iz

$$P = RI^2, \quad (4.11)$$

gdje je R otpor, a I struja kroz termobateriju. Otpor $R = 2\Omega$ je ekvivalentni otpor serijske veze otpornika R_1 i R_2 koji su ugrađeni u donju hladnu ploču koja je u kontaktu s donjom termoelektričnom baterijom. Vrijednost struje kroz termobateriju I se računa iz Ohmovog zakona (4.8) pri čemu su iz prethodnog zadatka (potpoglavlja 4.2.2) poznati napon ($U = 6,3\text{ V}$) i otpor (zavisu od kombinacije priključaka 4, 5, 6 i 10) u kolu.

4.2.4 Određivanje Seebeckovog koeficijenta za n- i p-tip poluprovodnika

Šema termobaterije s n- i p-tipom poluprovodnika prikazana je na slici 4.7. Poluprovodnik s elektronskom provodljivošću (n-tip) je legura bizmuta, telura i selena, a poluprovodnik sa šupljinskom provodljivošću (p-tip) je legura bizmuta, telura i antimona. Pomoću struje koja se šalje s ispravljača na grijač uspostavlja se temperaturna razlika između toplog i hladnog kraja termobaterije. Mjerenjem termoelektromotornih sila n- i p-tipa poluprovodnika kao i razlike temperatura toplog i hladnog kraja baterije, Seebekov koeficijent za n- i p-tip poluprovodnika se može odrediti iz jednačine (4.1).

Kao što je prikazano na slici (4.7), na potencijometru se okretanjem ručice bira elektromotorna sila koja se mjeri (T_1, T_2, N i P). Ove oznake odgovaraju elektromotornoj sili hladnog kraja, toplog kraja, n-tipa i p-tipa poluprovodnika, respektivno. Elektromotorne sile se očitavaju na digitalnom voltmetru koji je spojen na potencijometar. Temperature toplog i hladnog kraja termobaterije

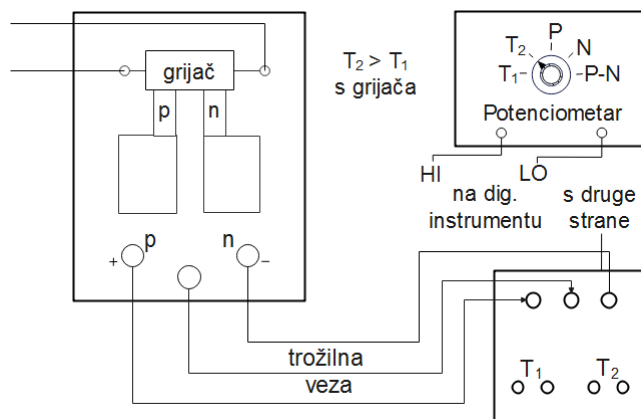
se mjere pomoću termoelementa bizmut-telurid čije je jedno spojište na konstantnoj temperaturi (uronjeno u mješavinu leda i vode u Dewrovoj posudi), a drugo je na temperaturi koja se mjeri (topli ili hladni kraj). Drugo spojište treba spojiti s potencijetrom na mjesta označena s " T_1 " i " T_2 " na zadnjoj strani potencijetra. Da bi se izračunale temperature toplog i hladnog kraja koje odgovaraju izmjerenim vrijednostima odgovarajućih elektromotornih sila, potrebno je pogledati tablicu baždarenja za termopar Bi-Te koja će biti obezbjeđena prilikom mjerenja. Uzmimo da treba izračunati temperaturu t kojoj odgovara izmjerena vrijednost termoelektromotorne sile E_t . Neka se vrijednost E_t nalazi između E_x i E_y koje su poznate iz tablice baždarenja (pri čemu je $E_y > E_x$). Njima odgovarajuće vrijednosti temperatura, t_x i t_y , su također poznate iz tablice. Temperatura t može se odrediti koristeći formulu

$$t = t_x + \frac{E_t - E_x}{E_y - E_x}(t_y - t_x), \quad (4.12)$$

ako je E_t bliže E_x ili

$$t = t_y - \frac{E_y - E_t}{E_y - E_x}(t_y - t_x), \quad (4.13)$$

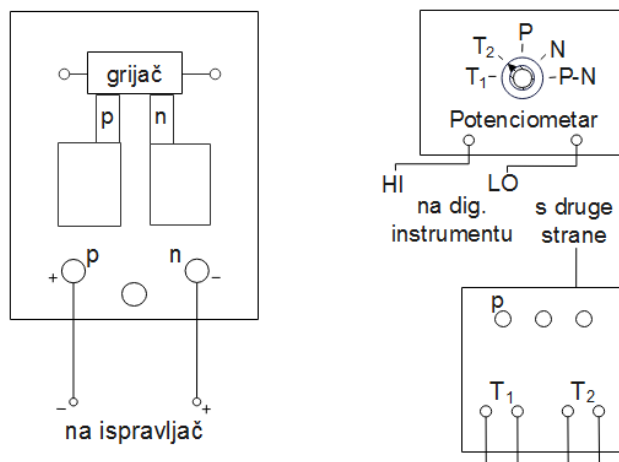
ako je E_t bliže E_y .



Slika 4.7. Šema za određivanje Seebeckovog koeficijenta u termoelementu s n- i p-tipom poluprovodnika.

4.2.5 Ispitivanje Peltierovog efekta u n- i p-tipu poluprovodnika

Šema za ispitivanje Peltierovog efekta u n- i p-tipu poluprovodnika data je na slici 4.8. Ukoliko se kroz termoelement propusti struja, uspostaviće se temperaturna razlika između toplog i hladnog kraja. Temperatura toplog i hladnog kraja se može odrediti mjerenjem termoelektromotornih sila kako je već opisano u potpoglavlju 4.2.4.



Slika 4.8. Šema za ispitivanje Peltierovog efekta u poluprovodnicima.

4.3 Praktičan rad

1. zadatak: Odrediti otpor termobaterije.

Prema proceduri opisanoj u potpoglavlju 4.2.1, kroz termobateriju propustiti struju od 4 A i odmah očitati napon dok se temperatura nije promijenila (treba raditi brzo). Koristeći jednačinu (4.8) izračunati R i zapisati rezultate:

$$I = \quad U = \quad R =$$

2. zadatak: Odrediti Seebeckov koeficijent za spoj Bi-Te.

Prema proceduri koja je opisana u potpoglavlju 4.2.2, za svaku kombinaciju priključnica sačekati otprilike 25 do 30 min, očitati temperature t_1 i t_2 i termoelektromotornu silu E te upisati podatke u tabelu 4.1.

Priključnice	t_1 (°C)	t_2 (°C)	ΔT (K)	E (mV)	α (mV/K)
5					
10					
10 (4+5)					
4					

Tabela 4.1. Tabela za zadatak 2.

Izračunati razliku temperatura ΔT i koristeći jednačinu (4.1) za svaku kombinaciju priključaka izračunati Seebeckov koeficijent termobaterije α . Izračunati srednju vrijednost Seebeckovog koeficijenta termobaterije i koristeći jednačinu

(4.9) odrediti α_{Bi-Te} . Grafički predstaviti zavisnost E od ΔT . Iz nagiba pravca također odrediti α i zatim izračunati α_{Bi-Te} .

3. zadatak: Odrediti toplotnu provodljivost termoelektrične baterije.

Toplotna provodljivost baterije može se odrediti prema proceduri opisanoj u potpoglavlju 4.2.3. Podatke za ΔT preuzeti iz tabele 4.1. Struju I izračunati iz Ohmovog zakona koristeći podatak da je $U = 6,3\text{V}$, a za vrijednosti otpora R uzeti odgovarajuće vrijednosti iz tabele 4.2 u zavisnosti od kombinacije priključaka. Snagu P odrediti iz formule (4.10) uz vrijednost $R = 2\Omega$. Odrediti K računskim putem za svaku kombinaciju priključaka, popuniti tabelu 4.2 i naći srednju vrijednost, a zatim K odrediti i grafičkim putem kao koeficijent pravca iz zavisnosti $P(\Delta T)$.

Priključnice	ΔT (K)	R (Ω)	I (A)	P (W)	K (W/K)
			$I = U/R, U = 6,3\text{V}$	$P = I^2 R, R = 2\Omega$	$K = P/\Delta T$
5		4			
10		3			
10 (4+5)		2,5			
4		2			

Tabela 4.2. Tabela za zadatak 3.

Kada se završi ovaj zadatak, treba prekinuti kolo struje tako što se isključe priključci "HEATERS AC" (slika 4.6). Treba čekati da se topli kraj termočlanka ohladi, a tek nakon toga se izvadi štapni termometar. Da bi se ubrzalo hlađenje kroz termočlanak propuštati struju iz priključaka "DC MODULE SUPPLY"; hlađenje se vrši strujom jačine 1 A sve dok na štapnom termometru temperatura ne padne ispod 30°C .

4. zadatak: Odrediti Seebeckov koeficijent n - i p -tipa poluprovodnika u funkciji srednje temperature.

Zadatak se radi na osnovu procedure opisane u potpoglavlju 4.2.4. Gornji kraj

U	E_{t_1}	E_{t_2}	E_p	E_n	t_1	t_2	t_{sr}	Δt	α_p	α_n
(V)	(mV)	(mV)	(mV)	(mV)	($^\circ\text{C}$)	($^\circ\text{C}$)	($^\circ\text{C}$)	($^\circ\text{C}$)	(mV/K)	(mV/K)

Tabela 4.3. Tabela za zadatak 4.

termoelementa zagrijati propuštanjem električne struje kroz grijač, a zatim izmjeriti termoelektromotorne sile E_{t_1} , E_{t_2} , E_p i E_n za nekoliko odabranih vrijednosti pada napona ($U = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 19\text{V}$). Rezultate upisati u tabelu

4.3 (po potrebi dodati još redova). Izračunati temperature t_1 , t_2 , Δt i srednju temperaturu t_{sr} . Odrediti Seebeckov koeficijent računskim putem, a zatim nacrtati njegovu zavisnost od srednje temperature t_{sr} za oba tipa poluprovodnika.

5. zadatak: Propuštanjem struje izmjeriti temperaturnu razliku između toplog i hladnog kraja poluprovodničkog termoelementa.

Zadatak se radi prema proceduri opisanoj u potpoglavlju 4.2.5. Mjerenje izvršiti za niz vrijednosti jačine struje od 0 do 9 A s korakom od po 1 A. Za svaku vrijednost struje očitati termoelektromotorne sile toplog i hladnog kraja termobaterije, E_{t_2} i E_{t_1} , respektivno. Podatke unijeti u tabelu 4.4 (po potrebi dodati još redova). Izračunati temperature t_1 , t_2 i Δt . Grafički predstaviti $\Delta T(I)$.

I (A)	E_{t_1} (mV)	E_{t_2} (mV)	t_1 ($^{\circ}\text{C}$)	t_2 ($^{\circ}\text{C}$)	Δt ($^{\circ}\text{C}$)	ΔT (K)

Tabela 4.4. Tabela za zadatak 5.

Vježba 5

Hallov efekt u poluprovodnicima

Zadaci:

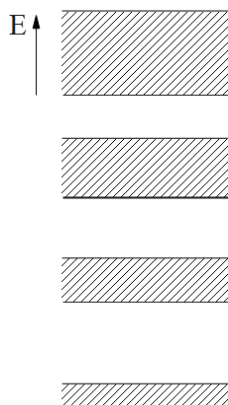
1. Izmjeriti Hallov napon u zavisnosti od jačine struje kroz primjerak n- i p-tipa Ge.
2. Izmjeriti napon kroz primjerak n- i p-tipa Ge u zavisnosti od magnetne indukcije. Izračunati promjenu napona i otpora.
3. Izmjeriti napon kroz primjerak n- i p-tipa Ge u zavisnosti od temperature i odrediti širinu zabranjene zone za n- i p-tip Ge.
4. Izmjeriti Hallov napon u zavisnosti od magnetne indukcije i odrediti Hallovu konstantu, pokretljivosti i koncentracije nosilaca naboja n- i p-tip Ge.
5. Izmjeriti Hallov napon u zavisnosti od temperature.

5.1 Teorijski uvod

5.1.1 Energetske vrpce

Čvrsta tijela najbolje opisuje teorija energetskih vrpca ili zonska teorija. Proračuni pokazuju da se prilikom nastanka čvrstih tijela formiraju energetske vrpce koje su elektronima dozvoljene i koje su međusobno razdvojene energetskim vrpcama koje su elektronima zabranjene. Vrpce koje odgovaraju unutrašnjim elektronima su uže, a vanjskim elektronima šire. S druge strane, širina područja zabranjenih energija opada s porastom energije. Ovo se može kvalitativno shvatiti kao posljedica činjenice da su unutrašnji elektroni jačim silama vezani za jezgra atoma nego vanjski.

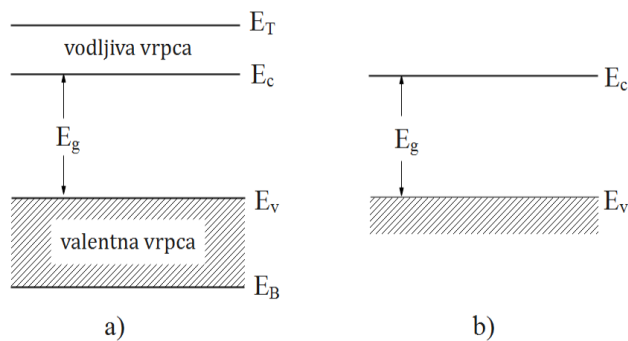
Na slici 5.1 šematski su prikazane energetske vrpce nekog čvrstog tijela. Dijagram predstavlja jednodimenzionalni prikaz zavisnosti energije elektrona u kristalu od njegovog položaja. Šrafirane vrpce predstavljaju kvazi-neprekidan spektar energetskih nivoa elektrona, a između njih se nalaze zabranjene vrpce



Slika 5.1. Šema energetske vrpce i zabranjenih zona hipotetske supstance.

koje se još nazivaju energetske procjepi ili gapovi. Zavisno od elektronske konfiguracije atoma i od strukture kristala, čvrsta tijela s obzirom na njihova električna svojstva mogu se podijeliti na: izolatore, metale i poluprovodnike.

Najviša energetska vrpca u kojoj su bar neka stanja popunjena elektronima naziva se valentna vrpca, a najniža energetska vrpca u kojoj su bar neka stanja prazna naziva se vodljiva vrpca. Naziv valentna vrpca potiče od toga što je popunjavaju valentni elektroni izolovanih atoma. Naziv vodljiva vrpca sugeriraju nam da je ona odgovorna za električna svojstva kristala. Za električnu vodljivost čvrstih tijela najvažnije su valentna i vodljiva vrpca, prikazane na slici 5.2 a). Pored toga, pošto se procesi električne vodljivosti odigravaju na račun nosilaca naboja koji se nalaze pri dnu vodljive i vrhu valentne vrpce, dovoljno je nacrtati samo rubove odgovarajućih vrpca, kao što je prikazano na slici 5.2 b). Ako je valentna vrpca potpuno popunjena elektronima, a vodljiva vrpca



Slika 5.2. a) Šematski prikaz vodljive i valentne vrpce b) Prikaz vrha valentne (E_v) i dna vodljive vrpce (E_c), gdje je E_g širina zabranjene zone.

potpuno prazna, čvrsto tijelo će se ponašati kao izolator. To je zato što u svim vrpca koje su potpuno zaposjednute, električno polje ne može dovesti do toka električne struje, jer elektroni ne mogu pod djelovanjem polja povećavati svoju

energiju, tj. prelaziti u viša stanja. Jasno je da prazna vrpca, tj. vrpca u kojoj nema elektrona, neće doprinosti toku električne struje. Širina zabranjene zone kod izolatora je oko 10 eV.

Ukoliko je zabranjena zona relativno male širine (oko 1 eV) onda govorimo o poluprovodnicima. Na vrlo niskim temperaturama, kada srednja termička energija nije dovoljna da pobudi elektrone iz valentne u vodljivu vrpca, poluprovodnik se ponaša kao izolator. Kako temperatura raste, mali broj elektrona dobiva dovoljno termičke energije i može da preskoči zabranjenu zonu čime su ostvareni uslovi za tok struje u vodljivoj vrpca. Pored toga, nezaposjednuta kvantna stanja koja preostaju u valentnoj vrpca, omogućavaju tok struje i u ovoj vrpca, pri čemu se prazna stanja posmatraju kao kvazi-čestice s pozitivnim nabojem i nazivaju se šupljine.

Ukoliko je vrpca djelimično popunjena, čvrsto tijelo će se ponašati kao metal. Kod metala se valenta i vodljiva vrpca preklapaju te su oni dobri provodnici elektriciteta i toplote.

5.1.2 Vlastita i primjesna vodljivost poluprovodnika. Koncentracija elektrona i šupljina.

U poluprovodniku koji ne sadrži atome primjesa, termičko pobuđivanje elektrona iz valentne u vodljivu vrpca dovodi do stvaranja parova elektron-šupljina. Takav poluprovodnik nazivamo poluprovodnik vlastite vodljivosti (intrinzični poluprovodnik). Broj parova elektron-šupljina naziva se intrinzična koncentracija nosilaca naboja (n_i). Pošto su koncentracije elektrona n i šupljina p , jednake, vrijedi da je $n=p=n_i$. Električna vodljivost je data sa

$$\sigma = e (n_i \mu_i + p_i \mu_p),$$

odnosno

$$\sigma = en_i (\mu_i + \mu_p),$$

gdje je μ_n pokretljivost elektrona, μ_p pokretljivosti šupljina, a e elementarni naboj. Fermi-Diracova funkcija raspodjele $f_n(E)$ predstavlja vjerojatnoću da je neko energetsko stanje energije E zaposjednuto elektronom:

$$f_n(E) = \frac{1}{e^{-\frac{E-E_F}{kT}} + 1},$$

gdje je E_F Fermijev nivo, k Boltzmanova konstanta, a T termodinamička temperatura. Vjerojatnoća da neko stanje bude zaposjednuto šupljinom je

$$f_p(E) = 1 - f_n(E).$$

Da bi se odredila zaposjednutost energetskih stanja u intervalu energije dE potrebno je poznavati položaj Fermijevog nivoa. Koncentracija elektrona u intervalu energije dE jednaka je

$$n = g_n(E) f_n(E) dE, \quad (5.1)$$

gdje je $g(E)$ funkcija gustoće stanja tj. broj stanja po jedinici zapremine po jediničnom intervalu energije. Funkcija gustoće stanja elektrona pri dnu vodljive vrpce je data kao

$$g_n(E) = \frac{m_n^* \sqrt{2m_n^* (E - E_C)}}{2\pi^2 \hbar^3}, \quad (5.2)$$

gdje je E_C dno vodljive vrpce, m_n^* efektivna masa elektrona, a \hbar redukovana Planckova konstanta. Koncentracija elektrona u vodljivoj vrpici izračunava se integriranjem jednačine (5.1) od dna (E_C) do vrha (E_T) vodljive vrpce. Gornja granica integriranja za elektrone može se zamijeniti s ∞ jer eksponencijalna funkcija raspodjele brzo opada s porastom E. Osim toga, pri dnu vodljive vrpce, Fermi-Dirakova funkcija se može zamijeniti Maxwell-Boltzmanovom funkcijom raspodjele što dodatno olakšava proračun. Koncentracija elektrona u vodljivoj vrpici je onda

$$n = \int_{E_C}^{\infty} g_n(E) f_n(E) dE, \quad (5.3)$$

što nakon integriranja, koje ovdje nećemo detaljno sprovesti, daje

$$n = 2 \left(\frac{2\pi m_n^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}},$$

gdje je h je Planckova konstanta.

Analognim postupkom dobija se koncentracija šupljina u valentnoj vrpici kao

$$p = 2 \left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}},$$

gdje je m_p^* efektivna masa šupljina, a E_V vrh valentne vrpce. U slučaju poluprovodnika vlastite vodljivosti važi da je $n = p$, pa ako gornje izraze izjednačimo i riješimo po E_F , dobijamo da je

$$E_F = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p^*}{m_n^*}. \quad (5.4)$$

Vidi se da je Fermijev nivo intrinzičnog poluprovodnika tačno na sredini zabranjene zone ukoliko su efektivne mase elektrona i šupljina jednake, a ukoliko nisu, on se pomiče prema gore ili prema dole. U germaniju se efektivne mase m_p^* i m_n^* ne razlikuju mnogo, pa se za praktične proračune može uzeti da se Fermijev nivo nalazi tačno na sredini zabranjene zone. Pošto vrijedi da je

$$n_i^2 = np$$

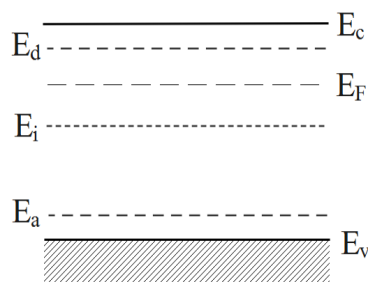
onda slijedi da je

$$n_i = \sqrt{np} = 2 \frac{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}} (m_n^* m_p^*)^{\frac{3}{4}}}{h^3} e^{-\frac{E_g}{2kT}}, \quad (5.5)$$

gdje je E_g širina zabranjene zone.

Uz dodatak drugih nesavršenosti, realni poluprovodnici uvijek sadrže određeni broj atoma primijesa. Primjesni atomi stvaraju svoje energetske nivoe koji se mogu naći bilo gdje u poluprovodniku. Često se u poluprovodnik namjerno uvode primjese da bi im se poboljšala određena svojstva, kao npr. električna vodljivost. Ovaj proces naziva se dopiranje, a poluprovodnik se u tom slučaju naziva poluprovodnik primjesne vodljivosti (dopirani, ekstrinzični poluprovodnik).

Razmotrimo primjer germanija (Ge), koji se nalazi u IV grupi periodnog sistema elemenata (PSE). U kristal Ge, mogu se supstitucijom dodati atomi iz



Slika 5.3. Poluprovodnik izrazito primjesne vodljivosti n-tipa. Položaj Fermije-
voga nivoa dopiranog poluprovodnika n-tipa je E_F , a intrinzičnog poluprovodnika
 E_i . Energetski nivoi donora su E_d , a akceptora E_a .

grupa V i III PSE. Petovalentne primjese nazivaju se donori, a njihovi energetski nivoi E_d smještaju se u zabranjenoj zoni u blizini dna vodljive vrpce (slika 5.3). Gradeći veze sa susjednim atomima Ge, donor otpušta peti elektron pošto je termička energija kristalne rešetke dovoljna da ga s donorskog nivoa pobudi u vodljivu vrpcu. Ovakav poluprovodnik je n-tipa jer su u njemu većinski nosioci naboja elektroni, dok su manjinski nosioci šupljine.

S druge strane, trovalentni atomi primjesa nazivaju se akseptori, a njihovi energetski nivoi E_a smještaju se u zabranjenoj zoni u blizini vrha valentne vrpce (slika 5.3). Gradeći veze sa susjednim atomima Ge, akseptor prihvata četvrti elektron koji mu nedostaje. Na račun ovog procesa u valentnoj vrpici ostaje nezaposjednuto stanje tj. šupljina. Ovakav poluprovodnik je p-tipa i u njemu su većinski nosioci šupljine, dok su manjinski nosioci elektroni. U dopiranim poluprovodnicima dolazi do pomijeranja Fermije-
voga nivoa prema gore ili prema dole u odnosu na Fermijev nivo intrinzičnog poluprovodnika.

U realnom poluprovodniku postoje i donorske i akceptorske primjese. Uko-
liko vrijedi da je koncentracija donora mnogo veća od koncentracije akceptora tj. $N_d \gg N_a$, takav poluprovodnik se naziva poluprovodnikom izrazito primjesne vodljivosti n-tipa (slika 5.3). Vidi se da je Fermijev nivo u ovakvom polupro-
vodniku (E_F) pomjeren prema gore u odnosu na Fermijev nivo intrinzičnog poluprovodnika (E_i). Analogno, ako je $N_a \gg N_d$ to je poluprovodnik izrazito primjesne vodljivosti p-tipa. Iako koncentracije elektrona i šupljina u primjes-
nim poluprovodnicima nisu jednake njihov proizvod np ostaje konstantan kao i kod intrinzičnog poluprovodnika.

Za proračune, koji ovdje neće biti detaljno izvedeni, zgodno je koncentra-
cije n i p prikazati pomoću relacija u kojima figurira intrinzična koncentracija nosilaca naboja n_i :

$$n = n_i e^{\frac{E_F - E_i}{kT}}, \quad (5.6)$$

$$p = p_i e^{\frac{E_i - E_F}{kT}}. \quad (5.7)$$

U jednačinama (5.6) i (5.7) veličina E_i predstavlja Fermijev nivo intrinzičnog poluprovodnika, a E_F Fermijev nivo dopiranog poluprovodnika.

Na poluprovodnik veoma utiču vanjski faktori. Ukoliko su temperature niske, termalna energija rešetke je za dva reda veličine manja od širine zabranjene zone i ne može doći do pobuđivanja elektrona iz valentne u vodljivu vrpcu. Međutim,

termalna energija je dovoljna da pobudi elektrone s donorskih nivoa u vodljivu vrpcu ili šupljine s akceptorskih nivoa u valentnu vrpcu. Vodljivost u ovom temperaturnom području nastaje usljed jonizacije primjesa te se ovo područje naziva *područje jonizacije*.

Kako se temperatura povećava, dolazi do jonizacije svih primjesa. Tada je $n = N_d$ i $p = N_a$. Ovo je *područje zasićenja (ekstrinzično područje)*.

Kako se temperatura dalje povećava, dolazi do pobuđivanja nosilaca naboja iz valentne u vodljivu vrpcu i poluprovodnik se približava stanju koje odgovara intrinzičnom poluprovodniku. Rezultirajuća koncentracija naboja je tada $n = n_i$. Ovo je *intrinzično područje*.

5.1.3 Hallov efekt

Hallov efekt je nastanak transferzalnog električnog polja u provodniku ili poluprovodniku kroz koji teče struja pod djelovanjem okomitog magnetnog polja. Usljed toga, rezultujuće električno polje i smjer struje kroz uzorak nisu više paralelni. Ova pojava nastaje zbog djelovanja magnetnog polja Lorentzovom silom na nosioce struje

$$\vec{F} = \pm e (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (5.8)$$

gdje je e elementarni naboj, \vec{v} brzina nosilaca struje, a \vec{B} magnetna indukcija. Predznak "+" ili "-" zavisi od toga da li su razmatrani nosioci struje šupljine ili elektroni. Djelovanje magnetnog polja dovodi do skretanja nosilaca struje prema bočnoj strani uzorka.

U početnoj fazi efekta, dok magnetno polje raste do svoje maksimalne vrijednosti, nosioci struje se kreću prema bočnoj strani uzorka, kako to prikazuje slika 5.4 a) za p- i n-tip poluprovodnika. Za isti smjer struje i orijentaciju magnetnog polja i elektroni i šupljine će biti otklonjeni na istu stranu uzorka. Smjer Lorentzove sile za obje vrste nosilaca struje prikazan je na slici 5.4 b). Na slici 5.4 c) prikazana je stacionarna struja koja nastaje kad električni naboj nagomilan na bočnoj strani uzorka dovede do nastajanja dodatnog električnog polja jačine ε_y (tzv. Hallovo polje) koje sprječava daljnji dolazak novih naboja. Na slici 5.4 d) prikazane su x i y -komponente i rezultujuće električno polje koje s x -osom zaklapa ugao θ_p (za šupljine) odnosno θ_n (za elektrone) tzv. Hallov ugao.

Kada se uravnoteže sila kojom Hallovo polje djeluje na nosioce struje i Lorentzova sila, vrijedi da je

$$e\varepsilon_H = evB,$$

odnosno

$$\varepsilon_H = vB, \quad (5.9)$$

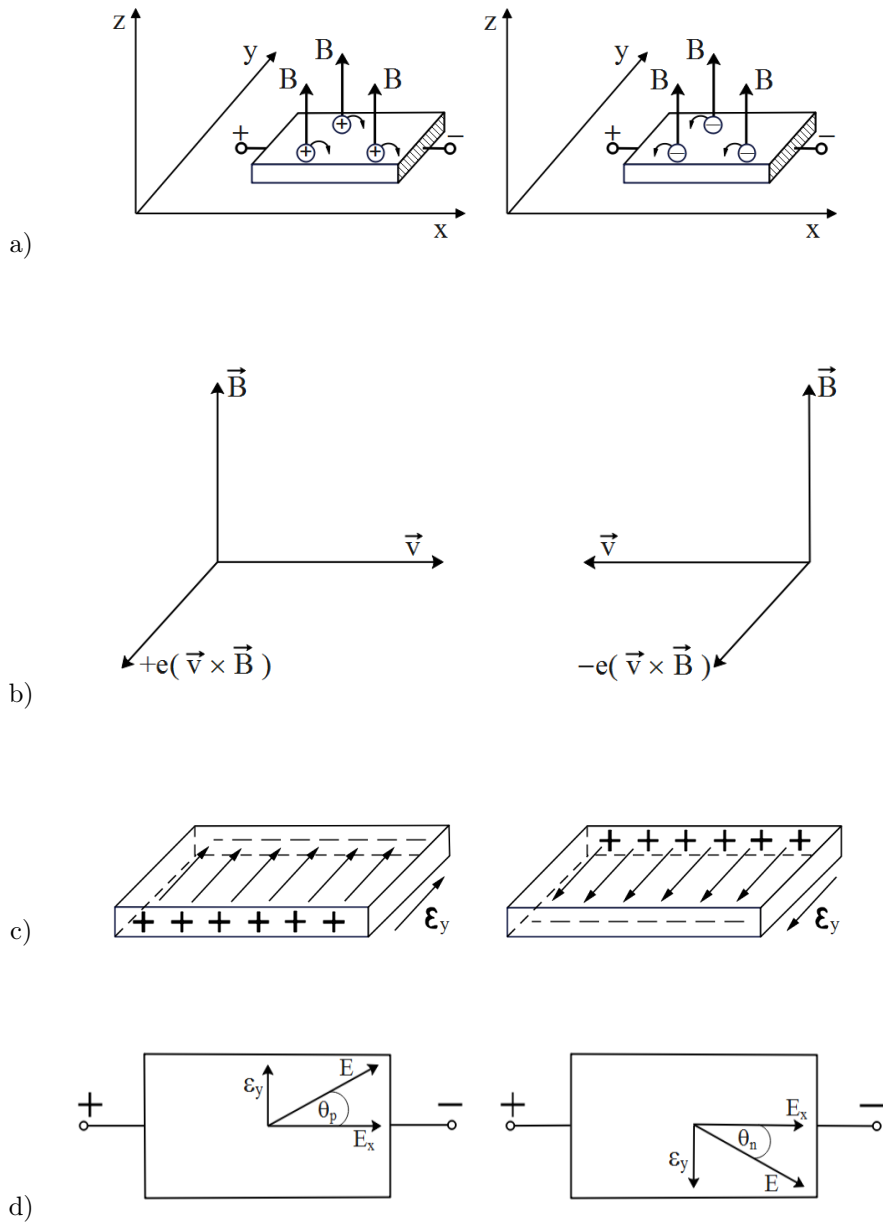
pri čemu je uvedena oznaka $\varepsilon_H = \varepsilon_y$.

Budući da je gustoća struje za elektrone $J = -nev$, a za šupljine $J = pev$, zamjenom v u (5.9) dobija se

$$\varepsilon_H = -\frac{1}{ne}JB \quad (5.10)$$

i

$$\varepsilon_H = \frac{1}{pe}JB. \quad (5.11)$$



Slika 5.4. a) Smjer struje, b) smjer brzine i Lorentzove sile, c) Hallovo polje, d) ukupno polje i Hallov ugao za p-tip i n-tip poluprovodnika.

Faktor proporcionalnosti uz proizvod JB definiše se kao Hallov koeficijent R_H tj.

$$R_H = -\frac{1}{ne} \quad (5.12)$$

za elektrone i

$$R_H = \frac{1}{pe} \quad (5.13)$$

za šupljine. Prema tome vrijedi da je

$$R_H = \pm \frac{\varepsilon_H}{JB} \quad (5.14)$$

zavisno od smjera Hallovog polja ε_H .

Određivanje smjera Hallovog polja omogućava da se odredi tip vodljivosti poluprovodnika. Pored toga, određivanje numeričke vrijednosti Hallovog koeficijenta omogućava da se na osnovu relacija (5.12) i (5.13) odrede koncentracije nosilaca naboja u uzorcima n- i p-tipa poluprovodnika. Ovo naravno vrijedi samo u slučajevima kad je ispitivani poluprovodnik izrazito primjesne vodljivosti p- ili n-tipa, pa se koncentracija sporednih nosilaca može zanemariti. Ako se u poluprovodniku koncentracija sporednih nosilaca (elektrona u p-tipu ili šupljina u n-tipu) ne može zanemariti, izraz za Hallov koeficijent ima sljedeći oblik:

$$R_H = \frac{-n\mu_n^2 + p\mu_p^2}{e(n\mu_n + p\mu_p)^2}. \quad (5.15)$$

Predznak Hallovog koeficijenta zavisi od koncentracije nosilaca struje i od njihovih pokretljivosti. Ako se uvede tzv. količnik pokretljivosti kao

$$m = \frac{\mu_n}{\mu_p}, \quad (5.16)$$

onda jednačina (5.15) poprima oblik

$$R_H = \frac{-nm^2 + p}{e(nm + p)^2}. \quad (5.17)$$

U Ge, količnik pokretljivosti u području oko sobne temperature iznosi 2,1.

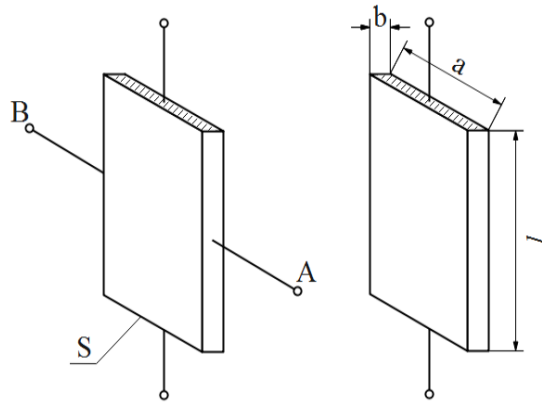
Uzorak na kojem se vrši mjerenje Hallovog efekta ima oblik pravougaone pločice prikazane na slici 5.5 a). Na gornjoj i donjoj površini prikazani su strujni kontakti i još dva dopunska električna kontakta A i B na bočnim površinama. Dopunski tzv. Hallovski kontakti izvedeni su u obliku tačkastih kontakata. Površina poprečnog presjeka uzorka je $S = ab$ gdje je a širina, a b debljina uzorka što je prikazano na slici 5.5 b). Dužina uzorka je l .

Kod određivanja Hallovog koeficijenta najčešće se mjeri Hallov napon U_H . Kod mjerenja se obično određuje ukupna struja I , a ne gustoća struje J . Budući da je

$$\varepsilon_H = \frac{U_H}{a} \quad \text{i} \quad J = \frac{I}{ab},$$

relacija (5.14) poprima oblik

$$R_H = \frac{U_H b}{IB}. \quad (5.18)$$



Slika 5.5. a) Strujni i hallovski kontakti. b) Dimenzije uzorka.

5.1.4 Širina zabranjene zone poluprovodnika

Postoji više metoda za određivanje širine zabranjene zone, E_g u poluprovodnicima. Česta je optička metoda u kojoj se uzorak poluprovodnika obasjava svjetlošću i određuje se prag apsorpcije.

Određivanje E_g može se izvesti i mjerenjem otpora (ili vodljivosti) poluprovodnika u zavisnosti od temperature. Ako je uzorak intrinzični, vrijedi da je $n = p = n_i$ pa je električna vodljivost

$$\sigma = en_i(\mu_n + \mu_p), \quad (5.19)$$

odnosno

$$\sigma = en_i\mu_n \left(1 + \frac{1}{m}\right), \quad (5.20)$$

gdje je $m = \frac{\mu_n}{\mu_p}$ količnik pokretljivosti.

Otpor uzorka u obliku pravougaone pločice (slika 5.5 a), izražen preko specifičnog otpora ρ i dimenzija uzorka, je

$$R = \rho \frac{\ell}{ab}. \quad (5.21)$$

Budući da je $\rho = \frac{1}{\sigma}$ slijedi da je

$$R = \frac{\ell}{\sigma ab}. \quad (5.22)$$

Uvrštavajući izraz (5.20) u gornju jednakost dobija se

$$R = \frac{\ell}{en_i\mu_n \left(1 + \frac{1}{m}\right) ab}. \quad (5.23)$$

Odavde se vidi (uz pretpostavku da m praktično ne zavisi od temperature) da otpor uzorka zavisi od temperature preko koncentracije i pokretljivosti nosilaca naboja. S povećanjem temperature dolazi do povećanog pobuđivanja elektrona

iz valentne u vodljivu vrpcu i time do povećanja koncentracije nosilaca. S druge strane, pokretljivost se smanjuje s temperaturom jer se povećava raspršenje nosilaca naboja na fononima. Teorija pokazuje da se za raspršenje elektrona na oscilacijama kristalne rešetke može približno uzeti da je

$$\mu_n \sim T^{-\frac{3}{2}}. \quad (5.24)$$

Oдавde se zaključuje da se koncentracija nosilaca naboja s temperaturom mijenja puno brže (jednačina (5.5)) od njihove pokretljivosti (jednačina (5.24)). Zato, koristeći jednačinu (5.5), može se napisati da je

$$R = C e^{\frac{E_g}{2kT}}, \quad (5.25)$$

gdje veličina C sadrži sve konstante iz jednačina (5.5) i (5.23).

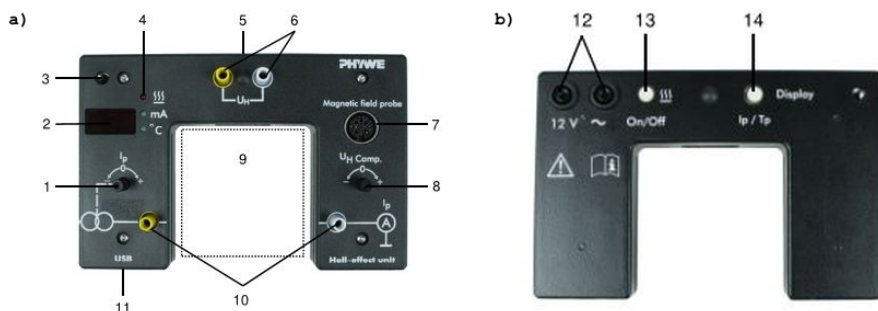
5.2 Uređaj i metodika rada



Slika 5.6. Eksperimentalna postavka za mjerenje Hallovog efekta u poluprovodnicima.

Eksperimentalna postavka za izradu ove vježbe prikazana je na slici 5.6. Za izradu eksperimenta je potrebno:

- Phywe modul za mjerenje Hallovog efekta,
- pločica p-tipa Ge,
- pločica n-tipa Ge,
- Hallova sonda i teslametar,
- Phywe izvor napona 230 V, DC:0...12 V, 2A/AC; 6 V, 12 V, 5 A,
- Solenoid sa 600 namotaja,
- željezno jezgro U-oblika,
- tripod.



Slika 5.7. Hallov modul prikazan s a) prednje i sa b) zadnje strane.

Phywe modul za mjerenja Hallovog efekta prikazan je na slici 5.7. Funkcije modula s njegove prednje strane, prikazane brojevima na slici 5.7 a), su sljedeće:

- (1) rotirajući zavrtnanj za podešavanje struje uzorka I_p ,
- (2) digitalni ekran gdje se prikazuje ili struja kroz uzorak I_p ili temperatura uzorka T_p ,
- (3) navoj za postavljanje priloženog držača- šipke,
- (4) serija LED dioda koje signaliziraju režim rada grijanja uzorka te temperature ili struje uzorka u zavisnosti šta se mjeri,
- (5) šupljina za umetanje Hallove sonde,
- (6) par priključci za mjerenje Hallovog napona U_H ,
- (7) ulaz za spajanje Hallove sonde,
- (8) rotirajući zavrtnanj za kompenzaciju Hallovog napona U_H ,
- (9) utor s kontaktima za postavljanje uzorka,
- (10) priključci za mjerenje napona na uzorku U_p ,
- (11) USB ulaz.

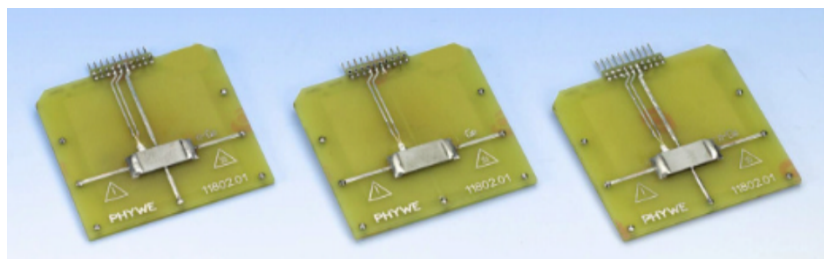
Funkcije modula sa zadnje strane (slika 5.7 b) su:

- (12) par priključaka za povezivanje s izvorom napona (modul se direktno povezuje s izvorom od $12\text{ V } \sim$),
- (13) taster za uključivanje/isključivanje grijanja,
- (14) taster za izbor prikaza struje I_p ili temperature T_p na ekranu.

Na početku je potrebno povezati sve elemente u skladu s datom procedurom:

1. Postaviti mjereni uzorak, prikazan na slici 5.8) u utore vodilica (9) pri tome vodeći računa da konektor na nosaču uzorka sigurno prijanya uz kontaktnu traku.

2. Zavrnuti držač-šipku u navojni nastavak (3). Ovo će omogućiti da se uzorak naknadno praktično pozicionira između polova elektromagneta. Prilikom postavljanja pločice s uzorkom unutar magneta treba biti veoma oprezan. Izbjegavati savijanje pločice da ne bi došlo do oštećenja kristala Ge i voditi računa o tome da se ona postavi u centar između polova magneta.
3. Za mjerenje magnetnog polja, priključiti Hallovu sondu na ulaze (6) Hallovog modula i postaviti je u šupljinu (5) do maksimalne moguće dubine. Ovo će osigurati da je vrh sonde u visini uzorka. S druge strane sondu je potrebno priključiti na teslametar.
4. Povezati odgovarajući digitalni multimeter na priključku (6) ili (10) za mjerenje Hallovog napona ili pada napona na uzorku prilikom mjerenja vodljivosti.
5. Struja ili temperatura se jednostavno očitavaju na ekranu Hallovog modula birajući "current mode" ili "temperature mode".
6. Prije korištenja rotirajućeg zavrtnja (1) za podešavanje struje I_p kroz uzorak između 0 i $\approx 50\text{ mA}$, pritisnuti taster (14) da se digitalni ekran (2) prebaci na odgovarajući režim mjerenja (na ekranu se treba prikazati natpis "mA").
7. Kada se određuje Hallov napon u funkciji od temperature, odabirom na tasteru (14) na ekranu se treba prikazati natpis "°C". Grijanje uzorka se aktivira pritiskom na (12) sa zadnje strane modula. Aktivno grijanje se prikazuje odgovarajućom kontrolom LED dioda (4). Kada se dostigne maksimalna temperatura od 140 °C , grijanje se automatski prekida i kontrolne LED diode se gase.



Slika 5.8. Uzorci Ge na nosačima.

Upozorenje! Postoji mogućnost da Hallovi kontakti ne leže direktno jedan nasuprot drugom zbog samog procesa proizvodnje. U tom slučaju, mjeriće se pogrešan napon na priključcima (6) kada struja prolazi kroz uzorak, a magnetno polje nije uključeno. Pomoću rotirajućeg zavrtnja (8) taj napon se može kompenzirati za svaku jačinu struje kroz uzorak. Osim toga, prilikom zagrijavanja uzorka nosač uzorka postaje vreo što može predstavljati opasnost od opekotina na rukama. **Ne dirati nosače uzorka dok se modul ne isključi i ne ohladi.**

Mjerenja se rade za oba tipa Ge (nije važno da li će se prvo mjeriti n-tip ili p-tip) pri čemu treba pažljivo postaviti uzorak u modul po već opisanoj proceduri. Za uzorke Ge koji se koriste u ovoj vježbi poznate su dimenzije:

$$b = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m},$$

$$\ell = 0,02 \text{ m},$$

$$S = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

i otpor na sobnoj temperaturi:

$$\text{za n-tip Ge } R_{sn} = 37,3 \Omega,$$

$$\text{za p-tip Ge } R_{sp} = 35,3 \Omega.$$

5.2.1 Zavisnost Hallovog napona od jačine struje

Pokazuje se da Hallov napon U_H linearno zavisi od jačine struje I_p koja se propušta kroz primjerak n- ili p-tipa poluprovodnika. Crtanjem grafičke zavisnosti $U_H(I_p)$ može se naći koeficijent proporcionalnosti iz nagiba pravca.

5.2.2 Određivanje promjene napona i otpora uzorka

Kad se na uzorak poluprovodnika primijeni magnetno polje dolazi do promjene otpora usljed smanjenja srednjeg slobodnog puta nosilaca naboja. Ukoliko se kroz uzorak propušta konstantna struja I_p , koristeći Ohmov zakon (5.27), relativna promjena napona i otpora se može izračunati kao

$$\frac{U_m - U_0}{U_0} = \frac{R_m - R_0}{R_0}, \quad (5.26)$$

gdje je R_0 otpor, a U_0 napon uzorka pri $B = 0 \text{ T}$. R_m i U_m su otpor i napon uzorka pri ostalim vrijednostima B .

5.2.3 Određivanje širine zabranjene zone

Ukoliko zagrijemo primjesni poluprovodnik (n- ili p-tip Ge u našem slučaju) na dovoljno visoku temperaturu, termičko pobuđivanje elektrona iz valentne u vodljivu vrpcu dovodi do porasta vlastite koncentracije nosilaca naboja n_i tako da vrijedi

$$n_i \gg n,$$

gdje je n koncentracija elektrona u vodljivoj vrpici samo na račun primjesa. Tada je primjesni poluprovodnik u intrinzičnom području i ponaša se kao poluprovodnik vlastite vodljivosti pa vrijedi jednačina (5.25).

Otpor uzorka R može se odrediti iz Ohmovog zakona

$$R = \frac{U_p}{I_p} \quad (5.27)$$

propuštanjem konstantne struje I_p kroz uzorak i mjerenjem napona na krajevima uzorka U_p . Uvrštavanjem (5.27) u (5.25) te logaritmiranjem dobija se jednačina prave oblika

$$\ln R = \ln \frac{U_p}{I_p} = C_1 + \frac{E_g}{2k} \frac{1}{T}, \quad (5.28)$$

gdje je konstanta $C_1 = \ln C$. Dovoljno je dakle pri konstantnoj struji kroz uzorak izmjeriti napon u funkciji od temperature, grafički predstaviti $\ln R$ u zavisnosti od $\frac{1}{T}$, a E_g odrediti iz koeficijenta pravca.

5.2.4 Određivanje Hallove konstante, koncentracije i pokretljivosti nosilaca naboja

Hallova konstanta R_H se može odrediti mjerenjem Hallovog napona U_H u zavisnosti od magnetne indukcije B na sobnoj temperaturi, pri konstantnoj vrijednosti struje I_p kroz uzorak. R_H se računa iz formule (5.18) pri čemu se $\frac{U_H}{B}$ određuje kao koeficijent pravca s grafika zavisnosti $U_H(B)$. Poznavajući R_H , n i p se mogu odrediti iz formula (5.12) i (5.13). Na višim temperaturama, kad je primjesni poluprovodnik u intrinzičnom području, njegova vodljivost se može predstaviti formulom

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2kT}}, \quad (5.29)$$

gdje je σ_0 električna vodljivost na sobnoj temperaturi. Poznavanjem dimenzija uzorka kao i otpora na sobnoj temperaturi, lako se može dobiti da je

$$\sigma_0 = \frac{\ell}{R_s ab}. \quad (5.30)$$

Ovdje je sa R_s označen otpor na sobnoj temperaturi i za n- i za p-tip poluprovodnika, ali prilikom praćuna treba uzeti odgovarajuće vrijednosti koje su date ranije u tekstu, a u zavisnosti od tipa poluprovodnika koji se mjeri. Vodljivost za n-tip poluprovodnika na sobnoj temperaturi data je kao

$$\sigma_{0n} = ne\mu_n = -\frac{\mu_n}{R_H}, \quad (5.31)$$

a za p-tip poluprovodnika kao

$$\sigma_{0p} = pe\mu_p = \frac{\mu_p}{R_H}. \quad (5.32)$$

Poznavajući R_H , n i p , mogu se izračunati pokretljivosti nosilaca naboja iz formula (5.31) i (5.32). Pokretljivost elektrona u n-tipu poluprovodnika je

$$\mu_n = R_H \sigma_{0n}, \quad (5.33)$$

a pokretljivost šupljina u p-tipu je

$$\mu_p = R_H \sigma_{0p}. \quad (5.34)$$

5.2.5 Promjena Hallovog napona s temperaturom

Pri konstantnoj vrijednosti struje, pokazuje se da se Hallov napon smanjuje s povećanjem temperature i u n- i u p-tipu uzoraka. Razlog tome je porast nosilaca naboja (prelazak s ekstrinzične na intrinzičnu vodljivost) i pad brzine drifta v , jer za istu vrijednost struje, veći broj nosilaca naboja znači da će brzina drifta biti manja.

5.3 Praktičan rad

1. zadatak: Izmjeriti Hallov napon U_H u zavisnosti od struje I_p kroz primjerak n - i p -tip Ge.

Postaviti uzorak Ge u modul. Spojiti multimeter na priključnice U_H na modulu i odabrati "current mode". Prije početka mjerenja postaviti struju i magnetno polje na nulu i kalibrisati Hallov napon na nulu. Zadati vrijednost magnetnog polja na 250 mT regulisanjem struje i napona na izvoru napona. Odrediti Hallov napon U_H u uzorku Ge mijenjajući struju I_p kroz uzorak u rasponu od -30 mA do 30 mA s korakom od 5 mA. Popuniti tabelu 5.1 (po potrebi dodati još redova), a zatim grafički predstaviti zavisnost $U_H(I_p)$. Iz grafika odrediti koeficijent proporcionalnosti. Ponoviti proceduru za drugi tip Ge.

I_p (mA)	U_H (mV)

Tabela 5.1. Tabela za zadatak 1.

2. zadatak: Izmjeriti napon U_p kroz primjerak n - i p -tipa Ge u zavisnosti od magnetne indukcije B i odrediti relativnu promjenu napona i otpora.

Postaviti uzorak Ge u modul. Spojiti multimeter na priključke napona uzorka U_p na prednjoj strani modula. Zadati vrijednost struje kroz uzorak od $I_p = 30$ mA. Izmjeriti napon U_0 za $B = 0$ T, a zatim povećavajući B do 300 mT s korakom od 10 mT izmjeriti ostale vrijednosti napona U_m . Izmjerene vrijednosti unijeti u tabelu 5.2 (po potrebi dodati još redova), izračunati odgovarajuće otpore i relativne promjene otpora i napona uzorka koristeći jednačinu (5.26). Grafički predstaviti relativne promjene otpora i napona u funkciji od B . Ponoviti postupak za drugi uzorak Ge.

B (mT)	U_m (mV)	R_m (Ω)	$\frac{U_m - U_0}{U_0}$	$\frac{R_m - R_0}{R_0}$

Tabela 5.2. Tabela za zadatak 2.

3. zadatak: Izmjeriti napon uzorka U_p u zavisnosti od temperature T i odrediti

širinu zabranjene zone E_g za n - i p -tip Ge .

Postaviti uzorak Ge u modul. Postaviti struju I_p na 30 mA. Magnetno polje je isključeno. Tokom mjerenja struja će ostati gotovo konstantna, ali će se U_p mijenjati s promjenom temperature. Odabrati režim rada na ekranu modula "temperature mode" i provjeriti da li ekran radi u tom načinu rada. Mjerenje započeti aktiviranjem grijače zavojnice pomoću tipke "on/off" na zadnjoj strani modula. Uzorak će se zagrijavati do maksimalno 140 – 150 °C nakon čega se modul automatski zaustavlja. Izmjerene vrijednosti napona u zavisnosti od temperature T upisati u tabelu 5.3, od sobne temperature do 140 °C. Preostale veličine izračunati. Grafički predstaviti zvisnost $\ln R$ od $\frac{1}{T}$. Koristeći jednačinu (5.28), iz nagiba pravca odrediti E_g . Ponoviti postupak za drugi uzorak Ge .

T (K)	$\frac{1}{T}$ ($10^{-3}K^{-1}$)	U (V)	R (k Ω)	$\ln R$

Tabela 5.3. Tabela za zadatak 3.

4. zadatak: Izmjeriti Hallov napon U_H u zavisnosti od magnetne indukcije B i odrediti Hallovu konstantu R_H , pokretljivosti nosilaca naboja μ_n i μ_p i njihove koncentracije n i p za n - i p -tip Ge .

Postaviti uzorak Ge u modul. Spojiti multimeter na priključke Hallovog napona U_H na prednoj strani modula. Kalibrisati Hallov napon pri $I_p = 0$ A. Postaviti vrijednost struje I_p na 30 mA. Izmjeriti Hallov napon U_H u funkciji od B . Početi od –300 mT i promjenom polariteta struje zavojnice na izvoru napajanja povećavati magnetnu indukciju s korakom od 20 mT. Na nultoj tački ponovo promijeniti polaritet. Izmjerene vrijednosti unijeti u tabelu 5.4 dodajući još redova ukoliko je to potrebno i nacrtati zavisnost $U_H(B)$. Hallova konstanta R_H se računa iz formule (5.18) pri čemu se $\frac{U_H}{B}$ određuje s grafika kao koeficijent pravca. Poznavajući R_H , koncentracija i pokretljivost nosilaca naboja može se odrediti iz procedure koja je objašnjenja u prethodnom potpoglavlju. Ponoviti mjerenja za drugi tip Ge .

B (mT)	U_H (mV)

Tabela 5.4. Tabela za zadatak 4.

5. zadatak: Izmjeriti Hallov napon U_H u zavisnosti od temperature T .

Postaviti uzorak Ge u modul. Postaviti struju na $I_p = 30\text{ mA}$ i magnetnu indukciju na $B = 300\text{ mT}$. Odabrali režim rada na ekranu modula "temperature mode" i provjeriti da li ekran radi u tom načinu rada. Ponavljajući istu proceduru kao u 3. zadatku, izmjeriti promjenu Hallovog napona u funkciji od temperature. Izmjerene vrijednosti U_H za zadate vrijednosti temperature T upisati u tabelu 5.5 od sobne temperature do 140°C . Grafički predstaviti $U_H(T)$.

$T(^{\circ}\text{C})$	U_H (mV)

Tabela 5.5. Tabela za zadatak 5.

Vježba 6

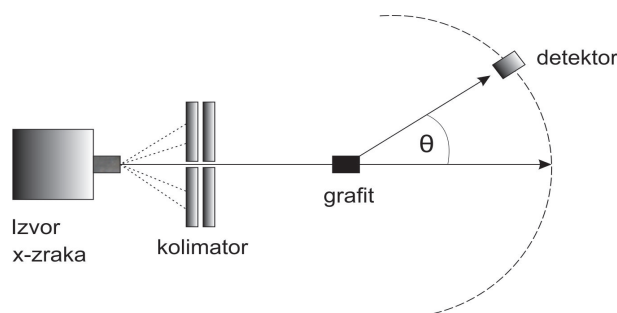
Comptonov efekt – energetski razlučivo direktno mjerjenje

Zadaci:

1. Kalibrisati multikanalni analizator uz pomoć Cu cijevi.
2. Odrediti energiju fotona karakteristične K_{α} linije Mo kao funkciju ugla raspršenja na raspršivaču od akrilnog stakla i grafički je predstaviti.
3. Izračunati Comptonovu talasnu dužinu elektrona pri raspršenju pod uglom od 90° i uporediti je s odgovarajućom teorijskom vrijednošću.

6.1 Teorijski uvod

Arthur Holly Compton (1892-1962) je 1923. godine proučavao rasijanje X-zraka na grafitu što je prikazano na slici 6.1. Opazio je da je talasna dužina rasijanog zračenja malo veća od talasne dužine upadnog zračenja i da razlika tih dviju talasnih dužina zavisi od ugla rasijanja θ .



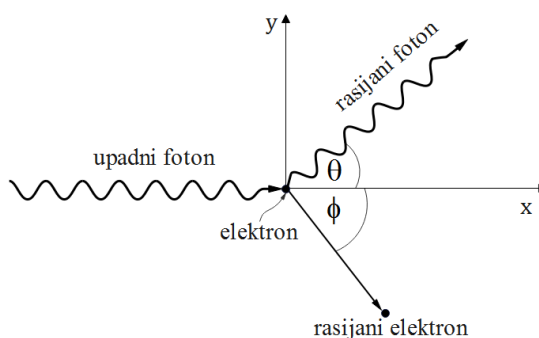
Slika 6.1. Šematski prikaz Comptonovog efekta. X-zrake iz izvora prolaze kroz kolimator i rasijavaju se na grafitu. Na detektoru se opaža talasna dužina rasijanog zračenja.

Ako se s λ' označi talasna dužina rasijanog zračenja, a s λ talasna dužina upadnog zračenja, tada je njihova razlika $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta), \quad (6.1)$$

gdje je $\lambda_c = 2,426 \cdot 10^{-12}$ m tzv. *Comptonova talasna dužina*, koja je određena eksperimentalno. Jednačina (6.1) je poznata pod nazivom **jednačina Comptonovog rasijanja**.

Compton je rezultate svog eksperimenta uspio objasniti na osnovu pretpostavke o postojanju fotona te je ovaj proces razmatrao kao sudar fotona X-zraka i elektrona unutar grafita. Elektroni u sudaru dostižu brzine bliske brzini svjetlosti pa u zakonima očuvanja energije i impulsa treba koristiti relativističke izraze za energiju i impuls.



Slika 6.2. *Rasijanje fotona na elektronu.*

Neka se foton rasijava na elektronu kao što je prikazano na slici 6.2. Prilikom sudara fotona i elektrona vrijede zakoni očuvanja energije i impulsa.

Energija fotona prije sudara je

$$E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (6.2)$$

a poslije sudara

$$E_{f'} = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'}, \quad (6.3)$$

gdje su λ i λ' talasne dužine fotona prije i poslije sudara, ν i ν' odgovarajuće frekvencije fotona, h Planckova konstanta, a c brzina svjetlosti u vakuumu.

Energija elektrona prije sudara je

$$E_e = m_0c^2, \quad (6.4)$$

a poslije sudara je

$$E_{e'} = \sqrt{m_0^2c^4 + p_{e'}^2c^2}, \quad (6.5)$$

gdje je m_0 masa mirovanja elektrona, a $p_{e'}$ njegov impuls.

Prije sudara impuls fotona je \vec{p}_f , a njegov intenzitet

$$p_f = \frac{E_f}{c}. \quad (6.6)$$

Poslije sudara impuls fotona je $\vec{p}_{f'}$, a njegov intenzitet

$$p_{f'} = \frac{E_{f'}}{c}. \quad (6.7)$$

Pošto elektron prije sudara miruje, njegov impuls \vec{p}_e jednak je nuli, a nakon sudara je $\vec{p}_{e'}$.

Prema zakonu održanja impulsa vrijedi da je

$$\vec{p}_f = \vec{p}_{f'} + \vec{p}_{e'}. \quad (6.8)$$

Odavde je

$$\vec{p}_{e'} = \vec{p}_f - \vec{p}_{f'}. \quad (6.9)$$

Kvadriranjem gornje relacije dobija se

$$p_{e'}^2 = p_f^2 - 2p_f p_{f'} \cos \theta + p_{f'}^2. \quad (6.10)$$

Ako se impulsi fotona izraze preko njihovih energija, konačno se dobija

$$p_{e'}^2 = \frac{1}{c^2}(E_f^2 - 2E_f E_{f'} \cos \theta + E_{f'}^2). \quad (6.11)$$

Iz zakona održanja energije slijedi da je:

$$E_f + m_0^2 c^4 = E_{f'} + \sqrt{m_0^2 c^4 + p_{e'}^2 c^2}. \quad (6.12)$$

Sređivanjem gornjeg izraza kvadrat impulsa elektrona jednak je

$$p_{e'}^2 = \frac{1}{c^2}(E_f^2 + E_{f'}^2 + 2m_0^2 c^4(E_f - E_{f'}) - 2E_f E_{f'}). \quad (6.13)$$

Izjednačavanjem jednačina (6.11) i (6.13) dobija se

$$E_{f'} = \frac{E_f}{1 + \frac{E_f}{m_0 c^2}(1 - \cos \theta)}. \quad (6.14)$$

Ako se energije fotona u jednačini (6.14) izraze preko talasnih dužina, jednostavnim sređivanjem dobija se

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos \theta) = \lambda_c(1 - \cos \theta), \quad (6.15)$$

gdje je $\frac{h}{m_0 c}$ Comptonova talasna dužina za elektron koja je nakon uvrštavanja datih konstanti u odličnom slaganju s eksperimentalno utvrđenom vrijednošću. Za ugao raspršenja $\theta = 90^\circ$, iz (6.15) dobiva se da je

$$\lambda_c = hc\left(\frac{1}{E_{f'}} - \frac{1}{E_f}\right). \quad (6.16)$$



Slika 6.3. Eksperimentalna postavka za mjerenje Comptonovog efekta.

6.2 Uređaj i metodika rada

Eksperimentalna postavka za izvođenje ove vježbe prikazana je na slici 6.3. Za izradu eksperimenta je potrebno:

- Phywe XR 4.0 Expert rendgenska jedinica, 35 kV,
- multikanalni analizator (MCA),
- poluprovodnički energetski detektor (XRED)
- Geiger-Müllerov brojač,
- XR 4.0 bakarna (Cu) rendgenska cijev,
- XR 4.0 molibdenska (Mo) rendgenska cijev,
- XR 4.0 set za snimanje karakterističnog Comptonovog efekta,
- aperture od 1 mm i 5 mm.

Na početku je potrebno povezati sve elemente u skladu s datom procedurom:

1. Pričvrstiti prsten na ulaznu cijev energetskog detektora i spojiti signalni i napojni kabl na odgovarajuće ulaze detektora.
2. Spojiti signalni i napojni kabl na odgovarajuće ulaze (XRED) u komori rendgenskog uređaja (slika 6.4 a).
3. Povezati vanjske XRED ulaze rendgenskog uređaja na multikanalni analizator (slika 6.4 b)). Ulaz za signalni kabl je označen crvenom, a ulaz za napojni kabl zelenom bojom. Povezati signalni kabl na ulaz "Input", a napojni kabl na ulaz "X-Ray Energy Det."
4. Osigurati energetski detektor u nosaču ruke goniometra. Ostaviti dovoljnu dužinu kablova tako da se goniometar može slobodno zakretati u cijelom opsegu uglova.
5. Povezati multikanalni analizator s računarom uz pomoć USB kabela.

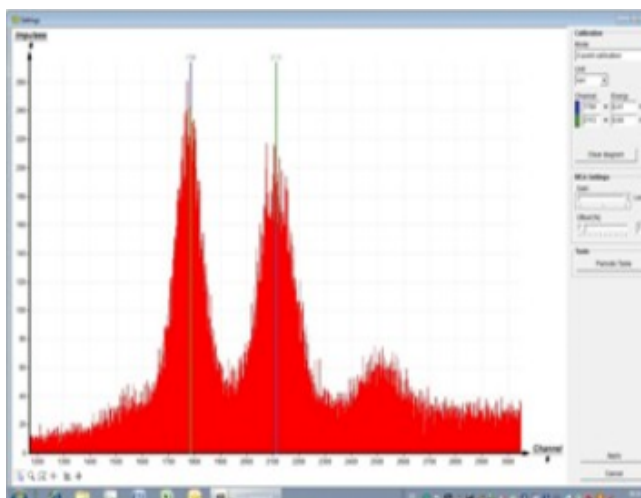


Slika 6.4. a) Ulazi u komori rendgenskog uređaja.b) Povezivanje MCA.

6. Dovedi goniometarski blok i detektor u njihove krajnje položaje na desnoj strani.

Kalibracija multikanalnog analizatora se vrši na sledeći način:

1. Postaviti cijev Cu s aperturom od 1 mm.
2. Zaključati vrata rendgenskog uređaja i dovesti detektor u položaj 0° . Zatim, pomicati detektor za nekoliko desetina stepena izvan nultog položaja.
3. Za Cu cijev odabrati sledeće parametre: ubrzavajući napon $U_A = 25$ kV, anodna struja $I_A = 0,02$ mA i potvrditi odabrane vrijednosti pritiskom tipke "Enter".
4. Uključiti rendgensko zračenje.
5. U softveru pod MEASURE odabrati opciju "Gauge" i unutar nje "Multi channel analyser". Zatim odabrati "Settings and calibration". Nakon pritiska tipke "Calibrate", može se mjeriti energetska spektar. Broj impulsa u sekundi treba biti < 300 c/s (counts per second). Parametri koje treba izabrati za kalibraciju su: 2-point calibration, Unit = keV, Gain = 2. Treba odabrati offset tako da se suzbiju nisko energetska signali (obično je dovoljno odabrati samo nekoliko procenata), pogledati sliku 6.5.
6. Kalibraciju vršiti 5 minuta, koristeći tajmer na rendgenskom uređaju.
7. Dovedi dvije kalibracione linije u takve položaje da se poklope s maksimumima dvije karakteristične rendgenske linije. Odgovarajuće vrijednosti energije za Cu cijev su: $K_\alpha = 8,04$ keV i $K_\beta = 8,9$ keV i treba ih unijeti u odgovarajuća polja u zavisnosti od boje.
8. Sačuvati kalibraciju pod odgovarajućim imenom.



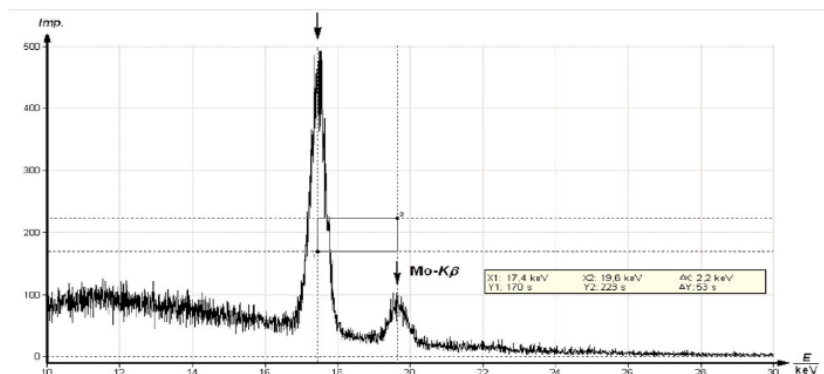
Slika 6.5. Kalibracija multikanalnog analizatora.

Comptonovo raspršenje se mjeri na sljedeći način:

1. Zamijeniti Cu cijev Mo cijevi.
2. Postaviti detektor u multi položaj i izabrati sljedeće parametre: dijafragmu od 1 mm, $U_A = 30$ kV, $I_A = 0,08$ mA.
3. Unijeti sljedeće parametre u polje "Control" u prozoru "Spectra recording": Gain = 2; Offset = 5 %, X-Data = keV, Interval width [channels]=1.
4. Uključiti rendgensku cijev. Vrijeme mjerenja bi trebalo biti oko 5 min tako da intenzitet pika bude približno 200 – 300 pulseva. Prihvatiti i spasiti podatke.
5. Postaviti raspršivač od akrilnog stakla na držač uzorka u položaj od 10° . Detektor postaviti na 20° .
6. Postaviti aperturu od 5 mm i povećati radni napon na 35 kV i struju na 0,3 mA.
7. Pokrenuti mjerenje. Vrijeme mjerenja je oko 10 min. Intenzitet K_α -pika treba biti oko 200 pulseva. Zaustaviti mjerenje s "Accept data".
8. Uraditi dodatna mjerenja mijenjajući ugao detektora u koracima od 10° do konačne vrijednosti od 110° .

Obrada dobivenog spektra u softveru je sljedeća:

1. Da bi se odredila energija svake dobijene linije, u softveru preći s "Bar display" na "Curve display". To se radi pritiskom na "Display options" i zatim "Interpolation and straight lines".
2. Povećati dio grafika od interesa korištenjem funkcije "zoom" (ikonica sa povećalom).



Slika 6.6. Spektar X-zraka molibdena.

3. Odabrati dio krive pomoću funkcije "+", otvoriti prozor "Function fitting", odabrati "Scaled normal distribution" i potvrditi.
4. Pronaći sredinu normalne distribucije uz pomoć funkcije "Peak analysis" ili uz pomoć funkcije "Survey". Dobijena vrijednost predstavlja vrijednost energije za odgovarajući ugao detektora.

Napomena: Na slici 6.6 prikazan je dio spektra X-zraka molibdena. Prilikom proračuna pomaka energije raspršenja u zavisnosti od ugla raspršenja u 2. zadržanju, potrebno je razmotriti samo prvu, visokoenergetsku K_{α} liniju molibdena.

6.3 Praktičan rad

1. zadatak: *Kalibrirati multikanalni analizator uz pomoć Cu cijevi.*

Koristeći proceduru koja je opisana u ranijem poglavlju, izvršiti kalibraciju multikanalnog analizatora (očekivati rezultat kao na slici 6.5) i sačuvati dobijeni grafik pod odgovarajućim imenom.

2. zadatak: *Odrediti energiju fotona karakteristične K_{α} linije Mo kao funkciju ugla raspršenja na raspršivaču od akrilnog stakla i grafički je predstaviti.*

Mijenjati ugao detektora od 20° do 120° s korakom od 10° i za svaki ugao snimiti spektar rendgenskog zračenja Mo. Nakon što se dobije spektar, očitati maksimum K_{α} linje prema proceduri koja je opisana u prethodnom poglavlju za svaki ugao. Eksperimentalne vrijednosti upisati u drugu kolonu tabele 6.1. U treću kolonu upisati teorijske vrijednosti energije K_{α} linije molibdena za svaki ugao, koristeći formulu (6.14). U formuli (6.14) energija K_{α} linije molibdena prije raspršenja je $E_f = 17,43$ keV. Nakon popunjavanja tabele uporediti eksperimentalne i teorijske vrijednosti dobivene energije za tri odabrana ugla (naći relativne greške). Nakon toga grafički predstaviti zavisnost energije od ugla raspršenja.

θ ($^{\circ}$)	$E_{f'_{exp}}$ (keV)	$E_{f'_{teor}}$ (keV)
20		
30		
40		
50		
60		
70		
80		
90		
100		
110		
120		

Tabela 6.1. Tabela za zadatak 2.

3. zadatak: Izračunati Comptonovu talasnu dužinu elektrona pri raspršenju pod uglom od 90° i uporediti je s odgovarajućom teorijskom vrijednošću.

Odrediti Comptonovu talasnu dužinu koristeći jednačinu (6.16). Eksperimentalnu vrijednost $E_{f'}$ za ugao od 90° očitati iz tabele iz prethodnog zadatka i opet uzeti $E_f = 17,43$ keV. Izračunati relativnu grešku u odnosu na teorijsku vrijednost Comptonove talasne dužine.

Vježba 7

Duane-Huntov zakon

Zadaci:

1. Snimiti spektar rendgenskih zraka koje emituje Cu anoda za različite ubrzavajuće napone.
2. Izračunati minimalnu talasnu dužinu zakočnog zračenja za različite vrijednosti ubrzavajućeg napona i provjeriti Duane-Huntov zakon.
3. Odrediti Planckovu konstantu i uporediti je s odgovarajućom teorijskom vrijednošću.

7.1 Teorijski uvod

O nastanku rendgenskih zraka je već dovoljno napisano te je za podsjećanje potrebno pročitati teorijski uvod iz vježbe 2. Elektroni se ubrzavajućim naponom U_a ubrzavaju od katode prema anodi i njihova kinetička energija E jednaka je

$$E = eU_a, \quad (7.1)$$

gdje je e elementarni naboj. Usljed interakcija elektrona sa atomima unutar anode, elektroni postepeno gube energiju koja se zrači s anode u vidu kontinuiranog spektra X-zračenja (zakočno zračenje, njem. bremspectrum). Ukoliko elektron izgubi svoju energiju samo u jednom koraku nastaje rendgensko zračenje maksimalne energije (minimalne talasne dužine λ_{min})

$$E_{max} = eU_a = \frac{hc}{\lambda_{min}}, \quad (7.2)$$

gdje je h Planckova konstanta, a c brzina svjetlosti.

Odavde se može zaključiti da je proizvod ubrzavajućeg napona i minimalne talasne dužine konstantna vrijednost. Američki fizičari William Duane (1872-1935) i Franklin L. Hunt (1883-1976) su dali vezu između kratkotalasne granice zakočnog zračenja i ubrzavajućeg napona koja je poznata pod nazivom Duane-Huntov zakon:

$$U_a \lambda_{min} = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ Vm}. \quad (7.3)$$

Za analizu rendgenskih spektara koriste se kristali i vrijedi Braggov zakon difrakcije (ranije dat u vježbi 2)

$$2d\sin\theta = n\lambda, \quad (7.4)$$

gdje je n red difrakcije, θ je Braggov ugao, λ je talasna dužina rendgenskih zraka, a d je udaljenost između Braggovih ravnina kristala.

Kombinujući jednačine (7.2) i (7.4) za $n=1$ dobija se

$$U_a = \frac{hc}{2edsin\theta_{min}}. \quad (7.5)$$

7.2 Uređaj i metodika rada

Eksperimentalna postavka za izvođenje ove vježbe je ista kao i u vježbi 2 i data je na slici 7.1 .

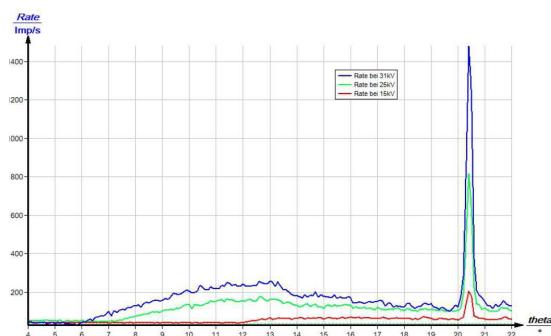


Slika 7.1. Eksperimentalna postavka za provjeru Duane-Huntovog zakona.

Za izradu eksperimenta je potrebno:

- Phywe XR 4.0 Expert rendgenska jedinica, 35 kV,
- Geiger-Müller-ov brojač,
- goniometar,
- XR 4.0 Bakarna (Cu) rendgenska cijev,
- LiF kristal,
- USB kabl za povezivanje sa računarom na kojem je instaliran odgovarajući softver,
- apertura dijametra $d = 2$ mm.

Za izradu ove vježbe potrebno je izvršiti povezivanje mjernog uređaja i kalibraciju goniometra koristeći LiF kristal i Cu cijev po proceduri koja je opisana u vježbi 2. Spasiti kalibraciju pod odgovarajućim imenom.



Slika 7.2. Zakočno zračenje Cu anode za tri različite vrijednosti ubrzavajućeg napona.

Nakon kalibracije može se provjeriti Duene-Huntov zakon i odrediti Planckova konstanta snimanjem spektra rendgenskog zračenja Cu cijevi na isti način kako je to urađeno u vježbi 2. Za kristal LiF poznata je udaljenost između Braggovih ravnina (200) i iznosi $d = 2,014 \cdot 10^{-10}$ m.

Ukoliko se snima cijeli spektar rendgenskog zračenja Cu anode mjerenja se vrše u rasponu uglova 4° - 55° , uz ubrzavajući napon od 35 kV i anodnu struju 1 mA. Ukoliko se vrše mjerenja zakočnog zračenja u funkciji ubrzavajućeg napona U_a samo do K_β linije, uzima se raspon uglova 4° - 22° , anodna struja 1 mA i ubrzavajući napon u rasponu 13 kV-33 kV sa korakom 2 kV. Za mjerenja u ovoj vježbi nije potrebno snimiti cijeli spektar. Primjer spektara zakočnog zračenja Cu dat je na slici 7.2.

7.3 Praktičan rad

1. zadatak: Snimiti spektar rendgenskih zraka koje emituje Cu anoda za različite ubrzavajuće napone.

Simiti rendgenske spektre za bakar za ubrzavajuće napone u rasponu 13 kV-33 kV (uzeti minimalno četiri mjerenja). Na osnovu grafika na kojima je prikazana zavisnost broja impulsa od Braggovog ugla, odrediti prag θ_{min} na kojem se pojavljuje zakočno zračenje za svaki od ubrzavajućih napona. Popuniti tabelu 7.1 odgovarajućim podacima.

U_a (kV)	θ_{min} ($^\circ$)

Tabela 7.1. Tabela za zadatak 1.

2. zadatak: Izračunati minimalnu talasnu dužinu zakočnog zračenja za različite vrijednosti ubrzavajućeg napona i provjeriti Duane-Huntov zakon.

Koristeći podatke iz tabele 7.1 izračunati λ_{min} za svaki ubrzavajući napon U_a koristeći Braggov zakon (7.4). Unijeti vrijednosti u tabelu 7.2. Na osnovu tabele 7.2 grafički predstaviti zavisnost λ_{min} od $1/U_a$. Iz grafika, na osnovu koeficijenta pravca, provjeriti relaciju 7.3.

U_a (kV)	$\frac{1}{U_a}$ (1/V)	λ_{min} (10^{-12} m)

Tabela 7.2. Tabela za zadatak 2.

3. zadatak: Odrediti Planckovu konstantu i uporediti je s odgovarajućom teorijskom vrijednošću.

Koristeći tabelu 7.1, izračunati $\sin(\theta_{min})$ za različite vrijednosti U_a i popuniti tabelu 7.3. Na osnovu tabele 7.3 prikazati grafičku zavisnost između $\sin(\theta_{min})$ i $1/U_a$. Iz nagiba pravca uz korištenje jednačine (7.5) odrediti Planckovu konstantu h , te je usporediti s tabličnom vrijednošću. Izračunati relativnu grešku.

U_a (kV)	$\frac{1}{U_a}$ (1/V)	$\sin(\theta_{\min})$

Tabela 7.3. Tabela za zadatak 3.

Fizikalne konstante

Naziv	Oznaka	Iznos
Planckova konstanta	h	$6,626 \cdot 10^{-34} \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}}$
Boltzmannova konstanta	k	$1,380 \cdot 10^{-23} \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2 \text{K}}$
Brzina svjetlosti u vakuumu	c	$299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Naboj elektrona	e	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masa elektrona	m	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Specifični naboj elektrona	e/m	$1,759 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$
Permeabilnost vakuuma	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$
Dielektrična konstanta vakuuma	ε_0	$8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$

Literatura

1. D. Dujak, M. Đekić, *Fizika: termodinamika, optika, atomska i nuklearna fizika*, elektronska knjiga, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo 2021.
2. Uputstvo za upotrebu za Frank-Hertz kontrolnu jedinicu Phywe
3. Uputstvo za upotrebu za Comptonov efekat Phywe
4. Uputstvo za upotrebu FERRANTI CRD7 diode
5. Uputstvo za upotrebu za Hallov efekat u poluprovodnicima Phywe
6. C. Kittel, *Uvod u fiziku čvrstog stanja*, Savremena administracija, Izdavačko-štamarsko preduzeće Beograd (1970)
7. M. A. Wahab, *Solid State Physics: Structure and Properties of Materials*, Narosa Publishing House, New Delhi (2015)
8. H. Julian Goldsmit, "Introduction to Thermoelectricity", Springer Series in Material Science, Vol. 121 (2016)
9. A. Markowicz, R. Grieken, "Handbook of X-ray spectrometry", Marcel Dekker Inc., Vol. 29 (2002)